Aufgabe 1.)

a) Eine natürliche Zahl a heißt Teiler einer natürlichen Zahl b, wenn es ein $k \in \mathbb{N}_0$ gibt mit $a \cdot k = b$.

Man schreibt $\underbrace{a / b}_{(a \text{ teilt } b)}$, $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}_0$.

Eigenschaften der Teilerrelation:

- $1 / a \quad \forall a \in \mathbb{N}_0$

  Beweis: $1 / a$

  (1) $\exists k \in \mathbb{N}_0 : 1 \cdot k = a$ (Definition „Teiler")

  (2) $1 \cdot a = a$ (elementares Rechnen)

  (3) $k = a$ (a), (2)

  (4) $k \in \mathbb{N}_0$, da $a \in \mathbb{N}_0$ $\overset{3}{\Rightarrow}$ Behauptung

- $a / a \quad \forall a \in \mathbb{N}$

  Beweis: a / a

  (1) $\exists k \in \mathbb{N}_0 : a \cdot k = a$ (?Definition „Teiler")

  (2) $a \cdot 1 = a$ (elementares Rechnen)

  (3) $k = 1$ ((1), (2))

  (4) $k \in \mathbb{N}_0$ (3)

  $\Rightarrow$ Behauptung

  Die Teiler 1 und a werden triviale Teiler der natürlich Zahl a genannt. (*) s. Seite 2

- $a / 0 \quad \forall a \in \mathbb{N}$

  Beweis: $a / 0$

  (1) $\exists k \in \mathbb{N}_0 : a \cdot k = 0$ (Definition „Teiler")

  (2) $a \cdot 0 = 0$ (elementares Rechnen)

(3) $k = 0$ ((1), (2))

(4) $k \in \mathbb{N}_0$ (3)

$\Rightarrow$ Behauptung

- Transitivität der Teilerrelation

Wenn $a|b$ und $b|c \Rightarrow a|c \quad \forall a,b \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{N}_0$

Beweis:

(1) $\exists k_1 \in \mathbb{N}_0 : a \cdot k_1 = b$ (Definition „Teiler"; Voraus s.)

(2) $\exists k_2 \in \mathbb{N}_0 : b \cdot k_2 = c$ (Def. „Teiler"; Vorauss.)

(3) $(a \cdot k_1) \cdot k_2 = c$ ((1); (2))

(4) $a \cdot (k_1 \cdot k_2) = c$ ((3); Assoziativität der Multiplikation in $\mathbb{N}$)

(5) $(k_1 \cdot k_2) \in \mathbb{N}_0$ ((1), (2); Abgeschlossenheit von $\mathbb{N}_0$ bzgl. Multiplikation)

(6) $a|c$ ((4); (5))

(*) Alle weiteren Teiler von a heißen echte Teiler.

Die Menge aller Teiler einer Zahl a (echte und triviale Teiler) heißt Teilermenge von a.

Man schreibt $T(a)$.

Weitere Eigenschaften werden in Teilaufgabe 1b und 2b behandelt.

1.b) Beh: $a, b, t \in \mathbb{N} : t|a \wedge t|b \Rightarrow t|a+b$

Voraussetzung: $t|a \wedge t|b$

(1) $\exists k_1 \in \mathbb{N}_0 : t \cdot k_1 = a$ (Def. „Teiler"; Vorauss.)

(2) $\exists k_2 \in \mathbb{N}_0 : t \cdot k_2 = b$ (Def. „Teiler"; Vorauss.)

(3) $t \cdot k_1 + t \cdot k_2 = a + b$ ((1), (2))

(4) $t \cdot (k_1 + k_2) = a + b$ ((3); Distributivität von Addition und Multiplikation in $\mathbb{N}_0$)

(5) $(k_1 + k_2) \in \mathbb{N}$ ((1), (2); Abgeschlossenheit der Addition in $\mathbb{N}_0$)

(6) ~~(…)~~ $t | a+b$

$\Rightarrow$ Behauptung ((4), (5))

Analog zur „Summenregel" könnte eine Differenzregel formuliert werden: ~~at~~ $t|a \wedge t|b \Rightarrow t|a-b$ (für $a>b$)

Aufgabe 2.)

a) sei α eine natürliche Zahl mit der Ziffern Darstellung

$$\alpha = a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0 \text{ mit } a_i \in [0;9]_{\mathbb{N}}$$

wobei $\alpha = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$ ist.

(1) Endziffern-Kriterien der Teilbarkeit

- $2/\alpha \Leftrightarrow 2/a_0$

  Eine natürliche Zahl ist durch 2 teilbar, genau dann wenn ihre letzte Ziffer durch 2 teilbar ist.

- $4/\alpha$ falls $4/a_1 a_0$

  Eine natürliche Zahl ist durch 4 teilbar, genau dann wenn die Zahl aus ihren letzten beiden Ziffern durch 4 teilbar ist.

- $8/\alpha \Leftrightarrow 8/a_2 a_1 a_0$

  Eine natürliche Zahl ist durch 8 teilbar, genau dann wenn die Zahl aus ihren letzten drei Ziffern durch 8 teilbar ist.

- $5/\alpha \Leftrightarrow 5/a_0$

  Eine natürliche Zahl ist durch 5 teilbar, genau dann wenn ihre letzte Ziffer durch 5 teilbar ist.

  (Also: 5 teilt eine natürliche Zahl, falls deren Endziffer eine 5 oder 0 ist.)

- $10/\alpha \Leftrightarrow 10/a_0$

  Eine natürliche Zahl ist durch 10 teilbar, genau dann wenn ihre letzte Ziffer durch 10 teilbar ist.

  (Also: 10 teilt eine natürliche Zahl, falls deren Endziffer eine 0 ist.)

Diese Endziffern - Kriterien ließen sich noch genauer unterscheiden in ~~Kriterien~~

- Kriterien nach der letzten Ziffer Teilbarkeit durch 2; 5; 10
- Kriterien nach den letzten zwei Ziffern Teilbarkeit durch 4 (Auch eine Teilbarkeitsregel durch 25 könnte hier angeführt werden.)
- Kriterien nach den letzten drei Ziffern Teilbarkeit durch 8

(2) Quersummen - Kriterien *

- $3 \mid a \iff 3 \mid Q(a)$

  Eine natürliche Zahl ist ~~g~~ durch 3 teilbar, genau dann wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.

- $9 \mid a \iff 9 \mid Q(a)$

  Eine natürliche Zahl ist durch 9 teilbar, genau dann wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.

- $11 \mid a \iff 11 \mid Qa(a)$

  Eine natürliche Zahl ist durch 11 teilbar, wenn ihre alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist

*

Quersumme: $Q(a) = \sum_{i=a}^{n} a$; für $a = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$

alternierende Quersumme:

$$Qa(a) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a \text{ ; für } a = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$$

2 b) Für die Teilbarkeit der natürlichen Zahlen gilt neben der Summenregel (Teilaufgabe 1b) auch eine Art „Faktorenregel".

Es gilt:

$a|c$ und $b|c \Leftrightarrow a \cdot b|c$

~~Beweis: Voraussetzung: $a|c$ und $b|c$~~

~~(1) $\exists k_1 \in \mathbb{N}_0 : a \cdot k_1 = c$ (Def. „Teiler"; Vorauss.)~~

~~(2) $\exists k_2 \in \mathbb{N}_0 : b \cdot k_2 = c$ (Def. „Teiler"; Vorauss.)~~

(3) (*)

Von dieser Überlegung ausgehend wird die 18 in Faktoren zerlegt: $18 = 2 \cdot 9$; $18 = 3 \cdot 6$; $18 = 3 \cdot 3 \cdot 2$ ~~[illegible]~~

Mit $18 = 2 \cdot 9$ wird die 18 in Faktoren zerlegt, zu denen es (einfache) Teilbarkeitskriterien gibt.

Folglich könnte man ~~ein~~ Teilbarkeitskriterium für die Teilbarkeit durch 18 wie folgt formulieren:

Eine natürliche Zahl ist durch 18 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 und ~~[illegible]~~ ihre Endziffer durch 2 teilbar ist.

(*) Beweis:

(1) $\exists k \in \mathbb{N}$ $(a \cdot b \cdot) k = c$ (Vorauss.; Def. „Teiler")

(2) $a \cdot (b \cdot k) = c$ ((1) Assoziativität der Multiplikation)

(3) $b \cdot (a \cdot k) = c$ ((1) Assoziativität der Multiplikation)

(4) $a \cdot k \in \mathbb{N}_0$ (da $a \in \mathbb{N}$; Abgeschlossenheit von $\mathbb{N}$ bzgl. Multiplikation)

(5) $b \cdot k \in \mathbb{N}_0$ (")

(6) $a|c \wedge b|c$ ((2), (3), (4), (5))

Aufgabe 3.)

Die Teilbarkeitsüberlegungen spielen eine wesentliche Rolle ~~in~~ bei der Bruchrechnung; v.a. beim Kürzen von Brüchen oder beim Erweitern ~~von~~ zweier (oder mehrerer) Brüche auf einen gemeinsamen Nenner.

Im Folgenden soll eine Unterrichtsstunde zum Thema „Kürzen von Brüchen" dargestellt werden (also eine Unterrichtsstunde in einer 6. Klasse.)

Es gilt als vorausgesetzt, dass die Schüler die Teilbarkeitsregeln in der 5. Klasse behandelt haben.

Weiterhin sei das Prinzip des Kürzens anhand einfacher Brüche ($\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$) bereits in ~~der~~ einer Vorstunde behandelt worden.

(Anmerkung: im Folgenden seien „großzahlige Brüche" Brüche deren Zähler und Nenner den Wert 100 übersteigen.)

Thema: Kürzen von großzahligen Brüche ~~stufenweise kürzen können~~

Jahrgangsstufe 6

Grobziel: Die Schüler sollen großzahlige Brüche stufenweise kürzen können.

Feinziele:
- Die Schüler sollen sich an die Teilbarkeitsregeln erinnern.
- Die Schüler sollen die Teilbarkeitsregeln sicher anwenden.
- Die Schüler sollen gemeinsame Teiler von Zähler und Nenner finden.

(Anmerkung: In dieser Stunde soll es zunächst darum gehen, Brüche mit beliebigen Faktoren zu kürzen. Das vollständige Kürzen von Brüchen wird erst in der Folgestunde bearbeitet.)

(1) Einstieg (ca. 10min): Kopfrechenphase

Auf einer Folie werden Zahlen dargeboten.
Diese werden einzelnd aufgedeckt.
Die Schüler sollen möglichst schnell einen Teiler der Zahl aufschreiben (schnelle und gute Schüler können auch mehrere Teiler notieren).
Der Schwierigkeitsgrad wird dabei gesteigert:

- Zahlen des kleinen 1x1
- Zahlen über 100
- Primzahlen

Dabei wird jedoch keine ganz scharfe Trennung bei der Steigerung gemacht. v.a. ~~die~~ Zahlen des kleinen 1x1 werden gelegentlich eingebaut, um die Motivation für schwächere Schüler zu erhalten.
Jeweils nach 3 Zahlen werden die Ergebnisse verglichen, wobei die Schüler ihre Ergebnisse begründen sollen. (So werden bei den großen Zahlen einige Teilbarkeitsregeln von den Schülern wiederholt.)

(2) Erarbeitung I (ca. 15 min): Partnerarbeit

Nachdem am Ende der Kopfrechenphase die Teilbarkeitsregeln verbal ~~wiederholt~~ genannt wurden, bekommen die Schüler nun ein Arbeitsblatt (=AB), auf dem diese schriftlich fixiert sind.
Dazu befinden sich auf dem AB Aufgaben, wie:

- Überprüfe folgende Zahlen auf Teilbarkeit durch ...
- Schreibe folgende Zahlen als beliebiges Produkt
- Finde zu folgenden Zahlenpaaren einen gemeinsamen Teiler

Nach Klärung der Aufgabenstellung (je eine Aufgabe des Aufgabentyps wird als Beispiel gemeinsam an der Tafel gerechnet) bearbeiten die Schüler das AB in Partnerarbeit mit homogenem Leistungsverhältnis, um „Vorsagen" zu vermeiden.
Die Lehrkraft steht schwächeren Schülern beratend und helfend zur Seite

(3) Erarbeitung II (ca. 15 min)
Gemeinsam mit der Lehrkraft werden nun Brüche gekürzt. Hierbei fixiert die Lehrkraft an der Tafel die Rechenschritte. Die Schüler sollen diese ~~diskut~~ diktieren. z. B. $\frac{402}{606} \overset{\text{gekürzt mit}}{\overset{3}{=}} \frac{134}{202}$

Hierbei wird den leistungsstärkeren Schülern vermutlich auffallen, dass noch weiter gekürzt werden kann. Ansonsten gibt die Lehrkraft einen entsprechenden Impuls („Kann man diesen Bruch auch kürzen?") So ~~werden~~ wird gemeinsam das stufenweise Kürzen von Brüchen erarbeitet.

(4) Fixierung (ca. 5min): Hefteintrag
Schließlich wird eine Aufgabe als „Musteraufgabe" in einem Hefteintrag fixiert.

~~(4) Hausauf~~

(5) Hausaufgabe:
Stufenweises Kürzen von Brüchen