1a) Eine natürliche Zahl m heißt Teiler einer natürlichen Zahl n, wenn gilt: $n = m \cdot x$

Schreibweise: $m | n$

Bsp.: $3 | 6$, da $6 = 3 \cdot 2$

1b) zu beweisen: Summenregel

$t \mid a \wedge t \mid b \Rightarrow t \mid a+b$

= per Definition gilt:

$a = t \cdot x \wedge b = t \cdot y$

$a+b = t \cdot x + t \cdot y$

$a+b = t(x+y)$

$\Rightarrow t \mid a+b$

2a)

Teilbarkeit durch 2:

Ist die letzte Ziffer eine Zahl durch 2 teilbar, so ist auch die ganze Zahl durch 2 teilbar.

Bsp.: $429\underline{6} \rightarrow 6 : 2 = 3 \rightarrow$ letzte Ziffer durch 2 teilbar $\Rightarrow 4296 : 2 = 2148$

Teilbarkeit durch 4:

Sind die letzten beiden Ziffern einer Zahl durch 4 teilbar, so ist auch die ganze Zahl durch 4 teilbar.

Bsp.: $35\underline{36} \rightarrow 36 : 4 = 9 \Rightarrow 3536 : 4 = 884$

$3537 \rightarrow 37 : 4 = 9{,}25 \Rightarrow 3537$ nicht durch 4 teilbar.

Teilbarkeit durch 5:

Sind die letzten beiden Ziffern einer Zahl durch 5 teilbar, so ist auch die ganze Zahl selbst durch 5 teilbar.

Bsp.: $52\underline{15} \rightarrow 15 : 5 = 3 \Rightarrow 5215 : 5 = 1043$

$52\underline{\underline{16}} \rightarrow 16 : 5 = 3{,}2 \Rightarrow 5216$ nicht durch 5 teilbar

Teilbarkeit durch 8:

Sind die letzten 3 Ziffern einer Zahl durch 8 teilbar, so ist auch die Zahl selbst durch 8 teilbar.

Bsp.: 34<u>168</u> -> 168 : 8 = 21

=> ganze Zahl durch 8 teilbar

34168 : 8 = 4271

34169 : 8 => 169 : 8 -> Ergebnis nicht ganzzahlig

=> 34169 nicht durch 8 teilbar

Teilbarkeit durch 25:

Sind die letzten 3 Ziffern einer Zahl durch 25 teilbar, so ist die Zahl selbst auch durch 25 teilbar.

Bsp.: 54<u>150</u> -> 150 : 25 = 6

-> 54150 durch 25 teilbar

54150 : 25 = 2166

54<u>151</u> -> 151 : 25 ist nicht ganzzahlig

-> 54151 nicht durch 25 teilbar.

Die aufgezeigten Teilbarkeitsregeln beziehen sich alle auf die Endstellen der Zahlen. Es gibt aber auch weitere Teilbarkeitsregeln, z. B. die Quersummenregel. Sie wird für Teilbarkeiten durch 3 und 9 angewendet.

Teilbarkeit durch 3:

Ist die Quersumme einer Zahl durch 3 teilbar, so ist auch die Zahl selbst durch 3 teilbar.

Bsp.: 813 -> Quersumme: 8 + 1 + 3 = <u>12</u> -> 12 : 3 = 4

-> 813 : 3 = 271

814 -> Quersumme 8 + 1 + 4 = 13 -> 13 : 3 = $4,\overline{3}$

=> 814 nicht durch 3 teilbar

Teilbarkeit durch 9:

Analog zu Teilbarkeit „durch 3", nur muss die Quersumme eine Zahl ergeben, die durch 9 teilbar ist.

Bsp.: 423 -> 4 + 2 + 3 = 9 => 9 : 9 = 1

-> 423 : 9 = 47

424 -> 4 + 2 + 4 = 10 => 10 : 9 = $1,\overline{1}$

~~Teilbarkeit durch 11~~ => 424 nicht durch 9 teilbar

Teilbarkeit durch 11:

Werden die Ziffern einer Zahl abwechselnd subtrahiert und addiert und ist das Ergebnis durch 11 teilbar, so ist auch die Zahl selbst durch 11 teilbar.

Bsp.: 74580 -> 7 - 4 + 5 - 8 + 0 = 0 -> durch 11 teilbar -> 74580 : 11 = 6780

74583 -> 7 - 4 + 5 - 8 + 3 = 3 -> nicht durch 11 teilbar.

26) Teilbarkeit durch 18:

Endet die Zahl gerade und die Quersumme der Zahl ergibt 9 oder ein Vielfaches von 9, so ist die ganze Zahl durch 18 teilbar.

Bsp.: 24300 => QS: 2+4+3+0+0=9 =>

~~...~~ geradzahlig und durch 9 teilbar

=> 24300 durch 18 teilbar

24300 : 18 = 1350

1332 => QS: 1+3+3+2=9 durch 9 teilbar + geradzahlig

=> 1332 durch 18 teilbar => 1332 : 18 = 74

24372 -> QS: 18, durch 9 teilbar und geradzahlig

-> 24372 durch 18 teilbar

24372 : 18 = 1354

84942 -> QS: 27, durch 9 teilbar und geradzahlig

-> 84942 durch 18 teilbar

84942 : 18 = 4719

898146 -> QS: 36, Vielfaches von 3 und geradzahlig

-> 898146 durch 18 teilbar!

898146 : 18 = 49897

3. Folgender Aufgabentyp soll in der Unterrichtseinheit (UE) von den Schülern gelöst werden:

Eine Terrasse, die 360 cm lang und 300 cm breit ist, soll mit Steinplatten ausgelegt werden, ohne dass die Steinplatten gestückelt werden. Die Steinplatten gibt es mit einer Seitenlänge von 10 cm bis 80 cm.

Welche Steinplatten können verwendet werden, wenn immer nur eine bestimmte Seitenlänge verwendet werden darf?

In der Aufwärmphase der UE werden vom Lehrer Kopfrechenaufgaben gestellt. Die Schüler notieren nur ~~das~~ die Ergebnisse, welche danach gemeinsam überprüft werden. Die gestellten Aufgaben sind Divisionen und Multiplikationen, da diese Rechenoperationen wichtig sind, um die Aufgabe lösen zu können.

In der Erarbeitungsphase sollen die Schüler zusammen mit dem Banknachbarn in ~~P~~ Partnerarbeit versuchen, die Aufgabe zu lösen. Jede Gruppe bekommt „Papier"steinquader mit den Seitenlängen, die zur Verfügung stehen. Sie sollen auf einem karierten Blatt die Terrasse aufmalen (1 cm entspricht 10 cm in echt) und nun mit den „Papier" Platten versuchen, die Fläche so auszulegen, dass sie anschließend vollkommen bedeckt ist, ohne irgendwo einen überstehenden Rand abzuschneiden.

Die Schüler sollen erkennen, dass es mehrere Möglichkeiten gibt die Terrasse mit Steinplatten auszulegen. Durch das Ausprobieren werden die Schüler mit derzeit zu dem Ergebnis kommen, dass die Fläche mit Steinplatten der Seitenlänge 10 cm, 20 cm, 30 cm und 60 cm ausgelegt werden kann. Dass Auslegen mit den Quadern dauert natürlich seine Zeit. Die Schüler sollen nun überlegen, wie man schneller zu einer Lösung gelangen kann. Sie sollen erkennen, dass 10, 20, 30 und 60 Teiler von 360 und 300 sind.

Eine Möglichkeit, die die Schüler anbieten werden, ist, dass die Zahlen 360 und 300 durch die jeweiligen Seitenlängen der Steinplatten dividiert werden. Da es keine Stückelung geben soll, müssen sich die Schüler auf die ganzzahligen Ergebnisse konzentrieren.

360 : 10 = 36	300 : 10 = 30
360 : 20 = 18	300 : 20 = 15
360 : 30 = 12	300 : 30 = 10
360 : 40 = 9	300 : 40 =
360 : 50 =	300 : 50 = 6
360 : 60 = 6	300 : 60 = 5
360 : 70 =	300 : 70 =
360 : 80 =	300 : 80 =

Diese Auflistung schreiben die Schüler in ihr Heft, nachdem sie im Plenum erarbeit worden ist und vom Lehrer an der Tafel notiert wurde. Durch die Gegenüberstellung sollen die Schüler schnell erkennen, dass 360 und 300 die gemeinsamen Teiler 10, 20, 30 und 60 hat und somit Steinplatten der Seitenlänge 10 cm, 20 cm, 30 cm und 60 cm verwendet werden können.

~~Eine weitere Möglichkeit~~

Zur Sicherung / Vertiefung bekommen die Schüler eine neue Aufgabe, die in der Vorgehensweise fast identisch ist.

Zwei Stäbe mit den Längen 36cm und 90cm sollen in gleich lange Stücke geschnitten werden. Welche Längen für die Stücke sind möglich?

~~Diese Aufgabe sollen die Schüler mit Hilfe der Primfaktorzerlegung lösen.~~

$T(36) = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18\}$

$T(90) = \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 15, 18, \ldots, 90\}$

$T(36; 90) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

Mögliche Längen für die Werkstücke:

1cm, 2cm, 3cm, 6cm, 9cm, 18cm

4. 1. Möglichkeit: Primfaktorzerlegung

$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$

$54 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^3$

für den größten gemeinsamen Teiler wichtig: gleiche Primfaktoren mit den niedrigsten Potenzen

-> in diesem Fall:

$ggT(36; 54) = 2 \cdot 3^2 \underline{\underline{= 18}}$

weiteres Beispiel:

$416 : 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13 = 2^5 \cdot 13$

$182 : 2 \cdot 7 \cdot 13$

$1430 : 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$

$ggT(182, 416, 1430) = 2 \cdot 13 = \underline{26}$

2. Möglichkeit: Euklidischer Algorithmus

Der Euklidische Algorithmus wird vor allem bei sehr großen Zahlen verwendet, da die Primfaktorzerlegung für sehr große Zahlen viel zu umfangreich wäre.