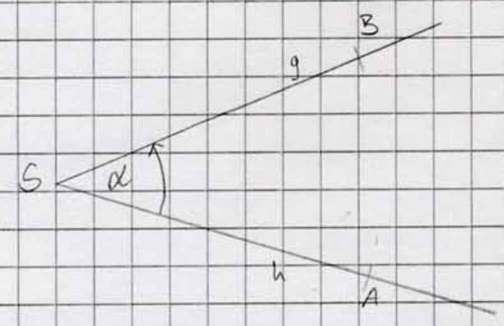
Thema (3)

1.a) Zuerst muss geklärt werden, was ein Winkel ist.

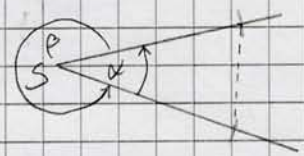


Ein Winkel α ist ein geordnetes Paar von Halbgeraden g und h, deren Anfangspunkt der Punkt S ist. Die Halbgeraden werden als Schenkel bezeichnet. Der Punkt S wird als ~~Spitze~~ Scheitelpunkt des Winkels α bezeichnet.

Für die richtige Bezeichnung des Winkels gilt:

$\alpha = \sphericalangle ASB$

$\beta = \sphericalangle BSA$

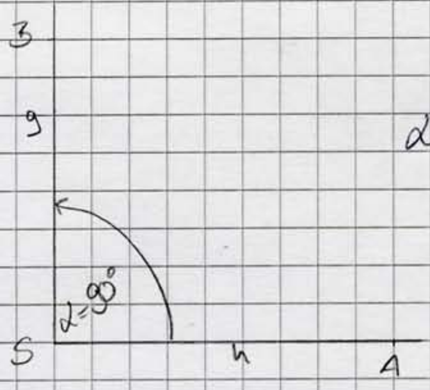


In einem Dreieck Δ SAB und α als Innenwinkel und β als Außenwinkel bezeichnet

1. Definition eines rechten Winkels

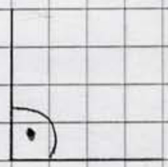
Ein geordnetes Paar von Halbgeraden g und h,

deren Anfangspunkt der Punkt S ist und $\alpha = 90°$,
bezeichnet man als rechten Winkel.



$\alpha = \measuredangle ASB = 90°$

Das Symbol eines rechten Winkels ist:

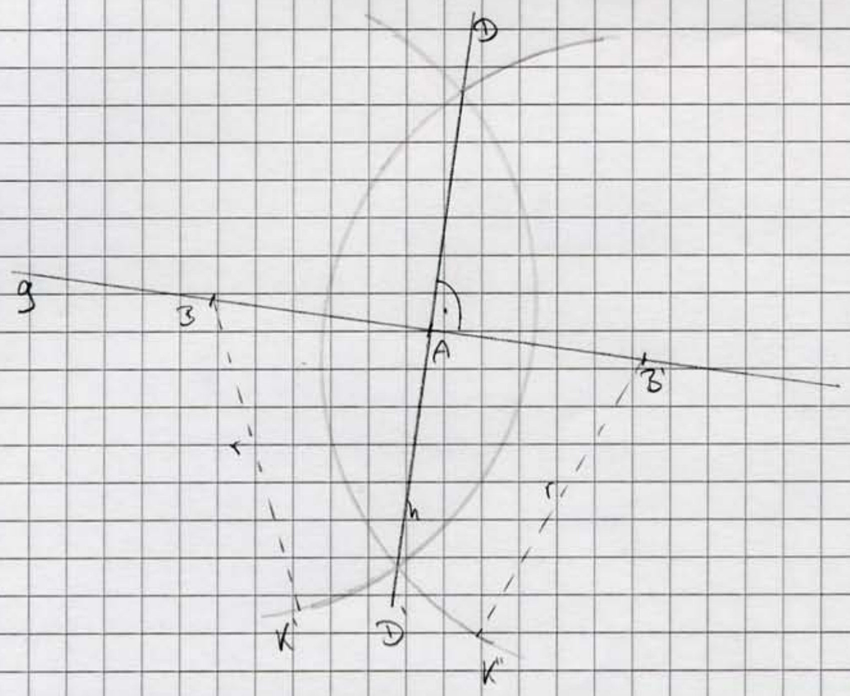


2. Definition eines rechten Winkels:

Ein rechter Winkel entsteht nach folgender Konstruktionsvorschrift:

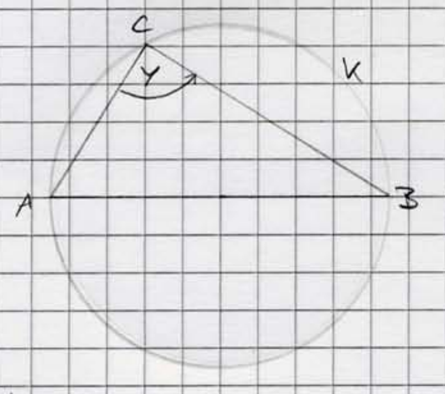
Gegeben sei eine Gerade g und ein Punkt A auf der Gerade:

1. Zeichne Kreis K mit beliebigem Radius um Punkt A
2. Die Schnittpunkte des Kreises mit der Geraden sind B und B
3. Zeichne Kreis K' um B mit Radius ($r > \overline{AB}$)
4. Zeichne Kreis K'' um B' mit Radius r
5. Die Schnittpunkte der beiden Kreise K' und K'' sind D und D'
6. ~~Die~~ Zeichne die Gerade h ~~durch D und D~~ auf denen die Punkte D und D' liegen
7. Die Geraden g und h schneiden sich im rechten Winkel



3. Definition eines rechten Winkels

Diese Definition ist auch eine Konstruktionsbeschreibung und ruht auf der Umkehrung des Satzes von Thales. Dieser besagt: Liegen die Punkte A, B und C eines Dreiecks $\triangle ABC$ auf einem Kreis K und eine Seite des Dreiecks ist der Durchmesser des Kreises K, so ist der Winkel γ, der der Durchmesser-seite des Dreiecks gegenüber liegt, ein rechter Winkel ($A \neq B$ und $A \neq C$) und $B \neq C$



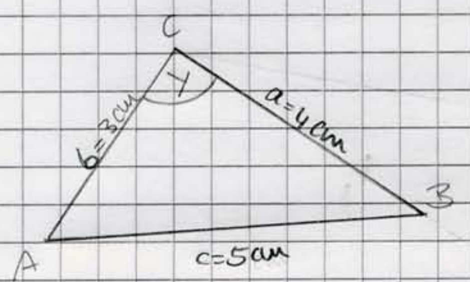
Konstruktion:

1. Zeichne Kreis K mit Radius r
2. Zeichne Zentrale z des Kreises K

3. Die Zentrale z geschnitten mit Kreis k ergeben die Punkte A und B
4. Zeichne beliebigen Punkt C auf Kreis k ein ($A \neq B \neq C$)
5. Verbinde die Punkte A, B und C zum Dreieck ΔABC
6. Der Winkel γ mit dem Scheitelpunkt C ist ein rechter Winkel.

4. Definition eines rechten Winkels

Diese Definition ist ebenfalls eine Konstruktionsbeschreibung und ruht auf der Umkehrung des Satzes von Pythagoras. Er besagt: ~~Sagt~~ Gilt in einem Punkt $a^2 + b^2 = c^2$, dann ist der Winkel mit dem Scheitelpunkt C ein rechter Winkel.



Die Konstruktionsbeschreibung werde ich mir dazu sparen. Analog kann man einen rechten Winkel über die Umkehrung des Höhensatzes konstruieren.

b) Zur ersten Definition ist zu sagen, dass sie für den Schüler die wichtigste Definition ist. Sie ist die einzige Definition bei der der recht Winkel mit einer Zahl in Verbindung gebracht wird. Ein rechter Winkel ist also 90° groß. Das ist für den Schüler leicht verständlich. Mittels seinen Geodreiecks kann er praktisch, überall wo nötig, einen rechten Winkel einzeichnen. In der ersten Definition kommen auch die wichtigsten Begriffe vor, aus denen ein Winkel besteht, wie Scheitelpunkt und Schenkel. Es ist also notwendig diese Definition im Unterricht zu verwenden, um den Schüler auch die mathematische Fachsprache näher zu bringen. Diese Definition sollte aber nicht die einzige Definition eines rechten Winkels im Unterricht sein. Sie sollte immer mit der zweiten Definition verbunden werden. Die zweite Definition ist eine Konstruktionsbeschreibung. Es ist wichtig den Schülern zu zeigen, dass auch ohne ein Geodreieck, ein rechter Winkel mit Hilfe eines Zirkels und Lineal zu konstruieren ist. Das Problem bei dieser Definition ist natürlich, dass der rechte Winkel in dieser Definition keinen Zahlenwert besitzt. Das ist in den übrigen Definition auch der Fall. Außerdem kommen in den Definitionen auch die Begrifflichkeiten eines Winkels nicht vor. Für viele Schüler ist es aber schwer, diese Konstruktionsbeschreibung nachzuvollziehen und zu verstehen. Deshalb bleiben auch viele Schüler eher bei der ersten Definition. Diese Konstruktion ist daher Grundvoraussetzung für viele andere Konstruktionen, wie Rechtecke, Quadrate, Achsenspiegelung oder Höhen in einem Dreieck. Deshalb ist es notwendig auf diese zweite Definition

Mälen einzugehen.

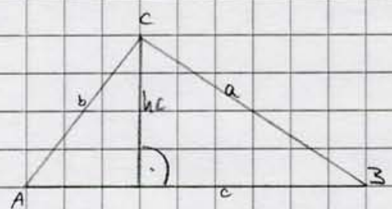
Die restlichen Definitionen sind für die Konstruktion für einen rechten Winkel eher irrelevant. Man konstruiert nicht einen rechten Winkel mit Hilfe des Satzes des Pythagoras oder mit Hilfe des Satzes von Thales, sondern rechtwinklige Dreiecke.

2. Der rechte Winkel spielt bei vielen Themen in der Hauptschule eine wichtige Rolle. Es gibt nicht viele Themen im Geometrieunterricht, in denen der rechte Winkel nicht irgendwie vorkommt. Im Themenbereich der Dreiecke kommt der rechte Winkel im rechtwinkligen Dreieck vor. Dreiecke werden also durch einen rechten Winkel klassifiziert. Später wird dann bei rechtwinkligen Dreiecken die Satzgruppe des Pythagoras angewandt. Hier spielt der rechte Winkel die entscheidende Rolle, da die Satzgruppe des Pythagoras nur für rechtwinklige Dreiecke gilt. Auch Vierecke werden durch rechte Winkel klassifiziert. So sind Vierecke mit 4 gleichlangen Seiten und drei rechten Winkeln Quadrate oder Vierecke mit lediglich 3 rechten Winkeln Rechtecke. Auch gibt

Quadrat Rechteck rechtw. Trapez

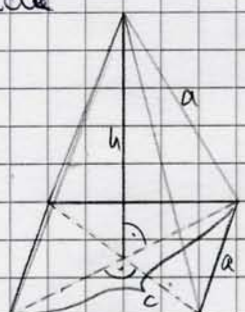
es Trapeze die rechtwinklig sein können. Um dann später Flächeninhalte oder Volumen ausrechnen zu können, ist echt wichtig zu erkennen, wo sich in einer Figur rechte

Winkel verstecken. Beispielsweise bei der Berechnung des Flächeninhaltes eines Dreiecks ist es wichtig die Höhe eines Dreiecks ~~einzeichnen~~ einzuzeichnen oder zu konstruieren. Die Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks ist Grundfläche mal die Höhe ($A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$). Die Höhe eines Dreieckes steht senkrecht auf eine Seite und verläuft durch den gegenüberliegenden Punkt.



Bei der Volumenberechnung eines Spitzenkörper ist es notwendig zu erkennen, dass die Höhe der Pyramide senkrecht auf die Grundfläche. Durch die Anwendung des Satzes des Pytagoras lässt sich beispielsweise die Höhe berechnen.

Bsp. Quadratische Pyramide



$$a^2 + a^2 = c^2$$

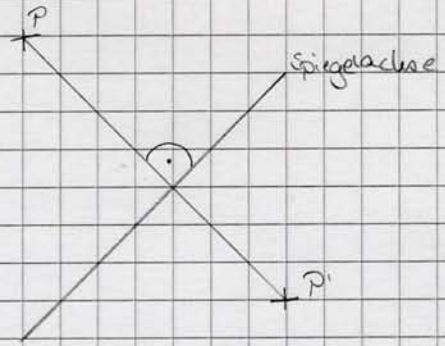
$$c = \sqrt{2a^2}$$

$$h^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{\sqrt{2a^2}}{2}\right)^2$$

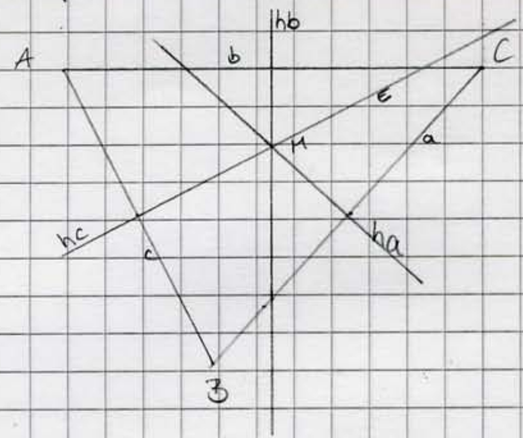
$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{2a^2}}{2}\right)^2}$$

Eine weitere wichtige Rolle spielt der rechte Winkel und die Konstruktion eines rechten Winkels bei der Achsenspiegelung. Will man einen Punkt an einer Achse spiegeln, muss man die Senkrechte durch diesen Punkt auf die Spiegelachse konstruieren, um den Bildpunkt zu erhalten. ~~Man~~ Man kann natürlich auch mit Hilfe eines Geodreiecks den Punkt spiegeln, das ändert aber nichts daran, dass die Senkrechte auf die Spiegelachse eingezeichnet werden muss.



Der rechte Winkel ist so grundlegend und kommt so häufig im Unterricht der Hauptschule vor, dass man nicht auf alle Themenbereiche eingehen kann. Ich denke, dass ich aber die wichtigsten genannt habe.

4. Der Umkreismittelpunkt eines Vierecks ~~liegt auf dem~~ ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten des Dreiecks.



Konstruktionsbeschreibung:

Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$ mit den Seiten a, b und c

~~(1) Kreis r um Punkt A zeichnen ($r > \overline{AB}$)~~

~~(2) Kreis r um Punkt B zeichnen~~

(1) zeichne K_1 um Punkt A mit Radius r ($r > \overline{AB}$)

(2) Zeichne K_2 um Punkt B mit Radius r

(3) Kreis K_1 geschnitten mit Kreis K_2 ergeben die Punkte D und E

(4) Zeichne Gerade h_c durch die Punkte D und E

(5) h_c ist Mittelsenkrechte zur Seite c

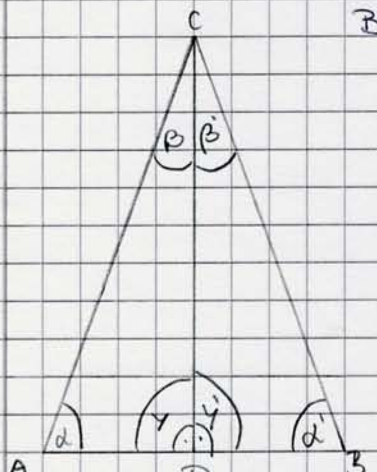
(6) Konstruiere analog zu oben die Mittelsenkrechte h_a zur Seite a und die Mittelsenkrechte h_b zu Seite b

(7) Schnittpunkt der Mittelsenkrechten h_a, h_b, h_c ist M

(8) Zeichne Umkreis k_U mit Radius $\overline{MA}$ um Punkt M

Begründung:

Satz 1: Liegt ein Punkt C auf der Mittelsenkrechten einer Strecke [AB], dann gilt $\overline{AC} = \overline{BC}$



Beweis: (1) $\overline{AD} = \overline{DB}$ (Vorr.)

(2) $\sphericalangle CDA = \sphericalangle BDC$ (Vorr.)

(3) $\overline{CD} = \overline{CD}$ (Identität)

(4) $\triangle ADC \cong \triangle DBC$ (1)(2)(3)(SWS)

(5) $\overline{AC} = \overline{BC}$ (entsprechende Seiten in kongruenten Dreiecken)

Umkehrung des Satzes (Satz 2)

Ist $\overline{AC} = \overline{BC}$, dann folgt, dass der Punkt C auf der Mittelsenkrechten liegt:

(1) $\overline{AC} = \overline{BC}$ (Vorr.)

~~(2) $\overline{AD} = \overline{BD}$ $\overline{CD} = \overline{CD}$ (Identität)~~

~~(3) $\overline{AD} = \overline{DB}$ (1)(2)~~

~~(4) $\triangle ADC \cong \triangle BDC$ (1)(2)(3)(SSS)~~

(2) ~~$\overline{AD} = \overline{BD}$~~ $\overline{CD} = \overline{CD}$ (Identität)

(3) $\alpha = \alpha'$ (Basiswinkelsatz)

(4) $\triangle ADC \cong \triangle DBC$ (1)(2)(3) (SWS)

(5) $\sphericalangle CDA = \sphericalangle BDC$ (entsprechende Winkel in kongruenten Dreiecken

(6) $\beta = \beta'$ (entsprechende Winkel in kongruenten Dreiecken)

(7) $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$ (3)(6)

(8) $\alpha + \beta = 90^\circ$ (9) $\gamma = 90^\circ$ (8) (IWS)

Nach Satz 1 ist im Ausgangsdreieck:

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ \overline{AM} = \overline{BM} \\ (2)\ \overline{BM} = \overline{CM} \end{array}\right\} \text{nach Satz 2 gilt: } \overline{BM} = \overline{CM}$$

Die Mittelsenkrechten schneiden sich in einem Punkt M.

3.

Sachanalyse

siehe Aufgabe 1

Mathematisch / Didaktische Analyse

In der 5. Jahrgangsstufe der Hauptschule befasst man sich mit den Winkeln. Meine Unterrichtseinheit wird eine Übungsstunde zum zeichnen und Erlernen von rechten Winkeln bei bestimmten Objekten. Sie wissen also schon die Definition eines rechten Winkels und wie man ihn konstruiert. Diese Stunde soll dazu beitragen das bisher erworbene Wissen zu festigen.

Lernziele:

Grobziel:

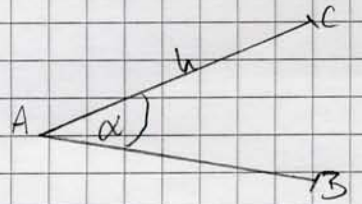
Schüler sollen ihr Wissen über den rechten Winkel vertiefen

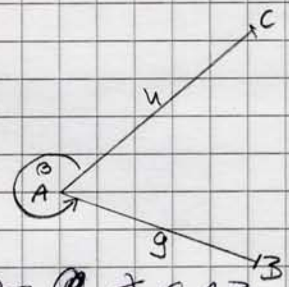
Feinziele:

- Schüler sollen in Figuren rechte Winkel erkennen
- Schüler sollen die Konstruktion einer Senkrechten verinnerlichen
- Schüler sollen in Stillarbeit selbsttätig arbeiten

Plan der Durchführung

Anfangs der Stunde steht die warming-up Phase. In dieser wird sich mit Winkelbegriffen auseinandergesetzt. Der Lehrer ~~und~~ zeichnet einen Winkel an die Tafel und die Schüler sollen ihn benennen:

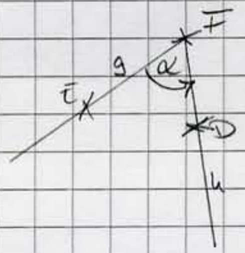




$\alpha = \sphericalangle BAC$ $\beta = \sphericalangle CAB$

Desweiteren werden die Winkelbezeichnungen vorgegeben und die Schüler sollen den Winkel zeichnen. Außerdem werden die Begriffe wie Schenkel und Scheitel bestimmt:

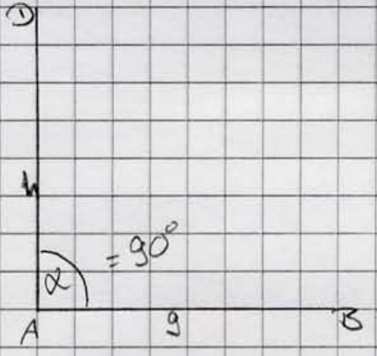
Zeichne aus drei Punkten D, E und F den Winkel $\alpha = \sphericalangle EFD$ und benenne seine Teile:



g und h sind die Schenkel

F ist der Scheitelpunkt

Zuletzt kommt man noch auf den rechten Winkel und seine Definition zu sprechen. Ein Schüler soll einen rechten Winkel mit Hilfe des Geodreiecks an die Tafel zeichnen und sagen wie groß das der Winkel α bei einem rechten Winkel ist.



h und g sind Schenkel

A ist Scheitelpunkt

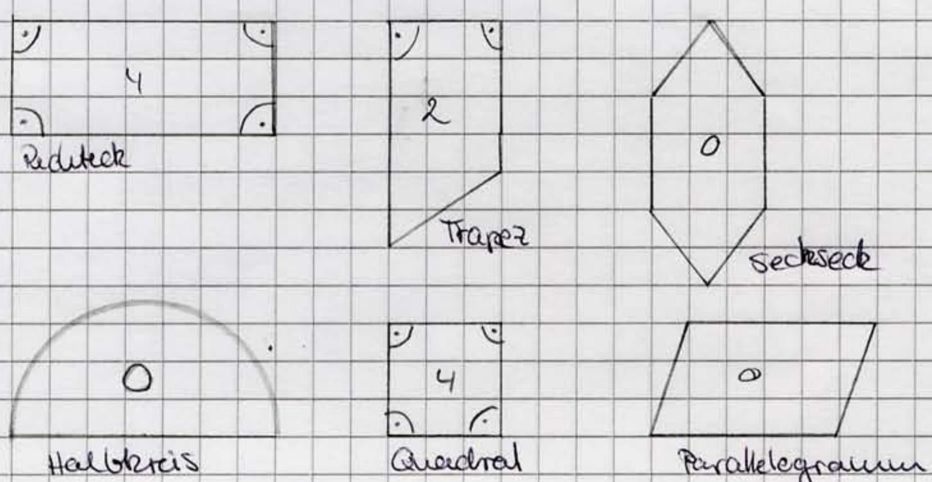
$\alpha = 90° =$ rechten Winkel

In der nun folgenden Übungsphase bekommen die Schüler ein Arbeitsblatt ausgeteilt, welches sie in Stillarbeit bearbeiten sollen.

1. Aufgabe

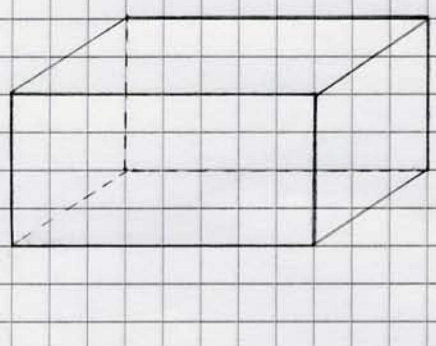
Wie viele rechte Winkel haben folgende Figuren?

Zeichne sie ein!



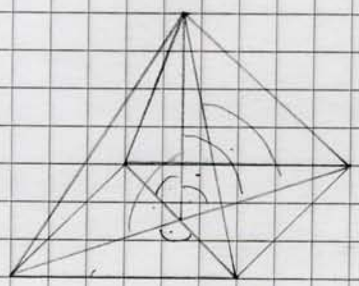
2. Aufgabe

Wie viele Rechte Winkel kannst du aus unserer Klassenzimmerform (Quader) erkennen

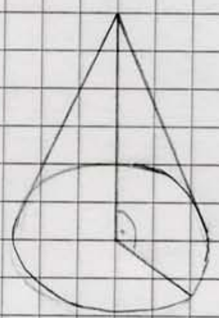


3. Aufgabe

Kannst du rechte Winkel erkennen



Quadrat. Pyramide

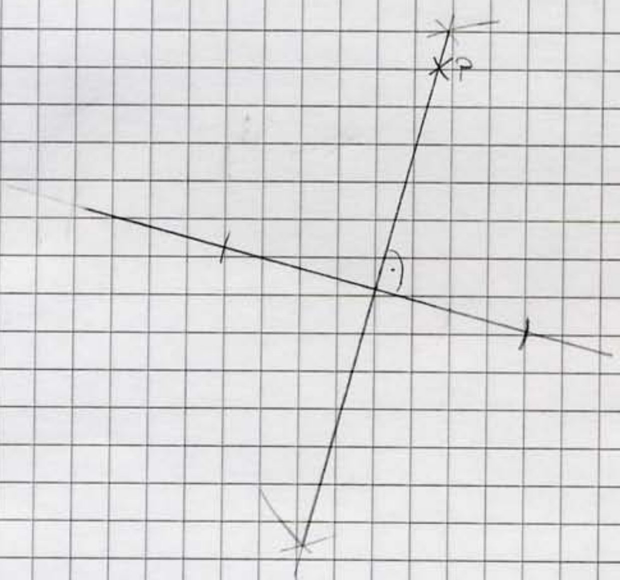


gerader Kreiskegel

Trapezprisma

4. Aufgabe

Konstruiere mit Zirkel und Lineal einen rechten Winkel durch Punkt P und der Geraden g.



Zum Schluss der Stunde, wenn alle fertig sind mit der Bearbeitung, bespricht der Lehrer die Aufgaben mit den Schülern an der Tafel. Schüler dürfen Aufgaben an der Tafel lösen.