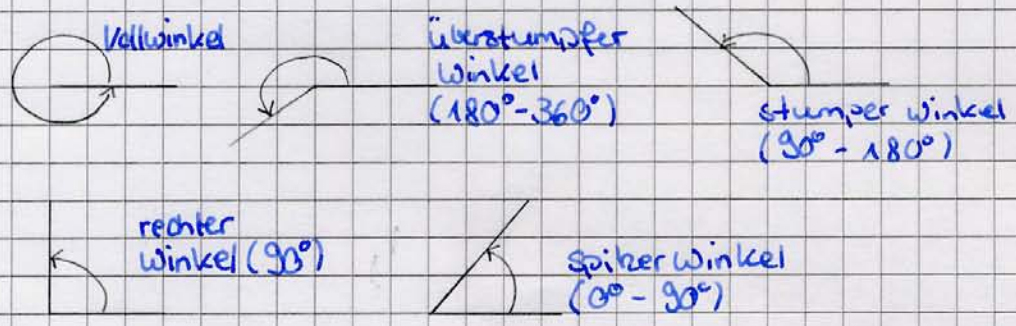


# Thema 3

## ① a) „rechter“ Winkel erläutern

- ▷ Ist der Schnittpunkt zweier Ebenen im Raum  $90^\circ$ , so schneiden sie sich in einem rechten Winkel.
- ▷ Ist der Schnittpunkt zweier Geraden in einer Ebene  $90^\circ$ , so schneiden sie sich in einem rechten Winkel.
- ▷ Wird eine Gerade  $g$  ~~im Raum~~ um einen Punkt  $P \in g$  um  $90^\circ$  gedreht, so schneiden sie sich in einem rechten Winkel.
- ▷ Wird ein Vollwinkel ( $360^\circ$ ) durch 4 dividiert, so entsteht ein rechter Winkel.

Neben dem rechten Winkel gibt es noch andere Winkel.



## b) Welche Definition eignet sich für die HS?

▷ Ebenen schneiden sich  $90^\circ$  im Raum

Die Vorstellung, dass Ebenen sich in einem Raum schneiden ist

so abstrakt schwer vorstellbar. Dennoch sind die meisten rechten Winkel in unserem Alltag an geschnittenen Ebenen.

Ⓕ Ecke im Zimmer, Schulbuch, Tafel, Treppenstufen, ...

Auch in der Geometrie spielt die Definition eine Rolle, wenn es darum geht Körper aufgrund ihrer Winkelseigenschaft zu beschreiben.

Die Definition ist dennoch in dieser Form nicht Hauptschulgeeignet.

=> ungeeignet ohne Bezug



### ▷ Geraden schneiden sich in $90^\circ$

Diese Vorstellung ist für Schüler wiederum leichter nachzuvollziehen. Zwei Geraden zeichnen kann jeder Schüler und, dass dieser Schnittwinkel bzw. wie die Geraden sich schneiden benannt werden soll kann vollständig gemacht werden. ~~Die~~ Diese Definition beschreibt die Lage zweier Geraden zueinander.

=> ist ok, da es geht lebensnaher

### ▷ Gerade dreht sich um $90^\circ$

Im Vergleich zur vorherigen Definition beschreibt diese die Entstehung eines  $90^\circ$ -Winkels, eine dynamische Definition. Sie beschreibt den Vorgang für Schüler, um einen  $90^\circ$ -Winkel zu zeichnen. Eine Gerade wird mit Hilfe eines Lineals gezeichnet. Der rechte Winkel zwischen dieser und einer weiteren entsteht, wenn das Lineal um  $90^\circ$  gedreht wird und dann die zweite Strecke gezeichnet wird.

=> Handlungsanweisung für Schüler, gute Definition

### ▷ Vollwinkel wird quadriert

Auch die Definition gibt eine Handlungsanweisung bzw. beschreibt die Entstehung eines rechten Winkels. Während die vorherige Definition die Entstehung eher mathematisch beschreibt, geht diese sehr lebensnah vor und ist eine ~~bestand~~ mit enaktiver Betonung. Zudem wird der Bezug eines rechten Winkels zum Ganzen hergestellt. In der Definition stehen weitere Infos und Eigenschaften, wie z.B. 4 rechte Winkel sind ein Vollwinkel oder ein rechter Winkel beträgt  $90^\circ$ , weil ein Vollwinkel  $360^\circ$  hat.

=> Handlungsanweisung, deswegen gut



## 2) Rolle rechter Winkel bei Themen und Begriffen im Geometrieunterricht der HS

Der Lehrplan der bayerischen Hauptschule gliedert den Mathematikunterricht innerhalb der Jahrgangsstufen in die einzelnen Lernfelder der Mathematik:

- > Geometrie
- > Zahlssysteme (N, Q, R)
- > Funktionen, Gleichungen, Formeln anwenden
- > Sachrechnen
- ⋮

Aufeinander aufbauend wird in jeder Jahrgangsstufe jedes Feld behandelt.

~~Im Bereich der Geometrie~~

Der Begriff "Winkel" bzw. "rechter Winkel" ist zunächst in der Geometrie anzusetzen. Aber auch die Bereiche Zahlssysteme oder Sachrechnen können, wie im Folgenden genauer erläutert, mit dem "rechten Winkel" in Verbindung gebracht werden, auch wenn dieser dort keine tragende Rolle spielt.

Die Grundbausteine der Geometrie stellen Punkte, Geraden, Ebenen und ihre Lage zueinander im Raum dar.



Die Lage zweier Geraden oder Ebenen zueinander kann sein:  
-> sie schneiden sich nie, d.h. sie sind parallel zueinander.  
-> sie schneiden sich in einem Punkt bzw. einer Geraden.

Der Winkel beschreibt die Tatsache, dass sie sich schneiden, das Winkelmaß wie.

-> sie schneiden sich in einem Winkel von 90°, d.h. sie sind senkrecht zueinander.

In der Hauptschule beschränkt sich die Geometrie anfangs auf eine Ebene, d.h. auf die Schnittpunkte 2er Geraden.

~~Aber~~ Der Schnittpunkt 2er Geraden ~~ist~~ spielt lediglich bei der Beschreibung von Körper-eigenschaften eine Rolle. Wobei es hier genau betrachtet nicht um den Winkel zwischen zwei Ebenen im Raum, sondern zwei Flächen geht.

(1 S. 6;.)

Das Kennenlernen von Figuren, ihren Eigenschaften und Besonderheiten ist Inhalt der HS Geometrie in den darauffolgenden Jahrgangsstufen.

Die Figuren Dreieck, Viereck, Quadrat, Rechteck, Parallelogramm, Raute, Drachens und Trapez, Vieleck und Kreis werden mit Hilfe ihrer Symmetrien, Seitenlänge und Verhältnisse, Mittellinien und Diagonalen und der Winkel erarbeitet und definiert.

Einige Figuren werden durch ihre Winkelverhältnisse beschrieben, andere zeichnen sich dadurch aus, dass ~~es~~ ein

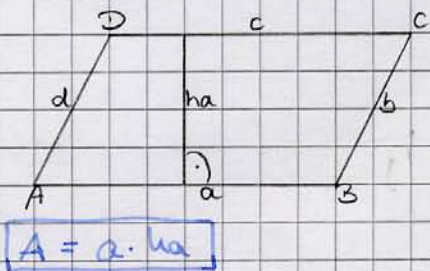


Winkel ein rechter Winkel ist, d.h. dass die ~~zwei~~ Seiten zweier anliegenden Geraden (Seiten, Mittellinien, Diagonalen) sich senkrecht schneiden bzw. treffen.

- B** Quadrateigenschaften::
- \* achsensymmetrisch ( $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ )
  - \* achsensymmetrisch bzgl. Diagonalen und Mittellinien
  - \* punktsymmetrisch
  - \* vier gleich lange Seiten
  - \* vier rechte Winkel
  - \* Diagonalen und Mittellinien schneiden sich  $\perp$  in rechten Winkel und halbieren sich

Neben den Eigenschaften bei speziellen  $n$ -Ebenen wird ~~die~~ der Flächeninhalt mit der Höhe der Figur berechnet. Jedes Viereck wird so zerlegt ~~in~~ und evtl. die Einzelteile neu zusammengesetzt, dass der Flächeninhalt die Grundseite multipliziert mit der Höhe errechnet wird.

**B** Flächeninhalt von Parallelogramm:



Durch Zerlegen bzw. Umlegen kann ein Parallelogramm in ein Rechteck verwandelt werden.

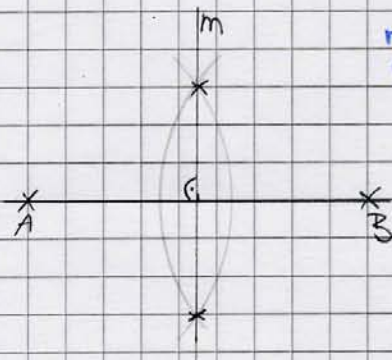
Dies zeigt, dass der Flächeninhalt von der Länge der Grundseite und der Höhe abhängig ist.

Doch was hat die Höhe bzw. der Flächeninhalt mit dem rechten Winkel zu tun? Die Höhe gibt an wie „hoch“ eine Figur ist, d.h. von der Grundseite bis zum obersten Punkt der Figur.

Die Höhe geht von der Grundseite senkrecht nach oben bis zu diesen. Da die Höhe senkrecht zur Grundseite ist, ~~ist~~ ist der Winkel zwischen Grundseite und Höhe  $90^\circ$ , ein rechter Winkel.

Auch für das Konstruieren anderer wichtiger Linien ist der rechte Winkel Grundlage. Die Mittelsenkrechten sind, wie der Name schon verrät, ~~senkrecht~~ Geraden die in der Mitte eine festgelegte Strecke senkrecht schneiden.

**B**

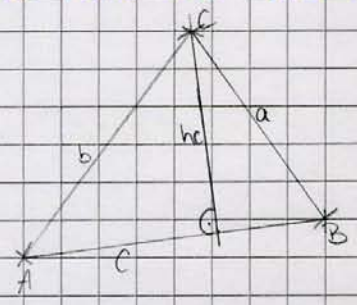


m ist die Mittelsenkrechte der Strecke [AB]



Die Höhe misst vom „höchsten“ Punkt einer Figur zur Grundseite.

[B]



$h_c$  ist die Höhe der Figur bzw. des  $\Delta ABC$  zur Grundseite  $c$

An besonderen Figuren gibt es extra Sätze, die im Zusammenhang mit rechten Winkeln stehen. Alle hier vorgestellten spielen auch in der Geometrie der Hs eine Rolle.

~~Der~~ Der Satz des Pythagoras beschreibt das besondere Verhältnis der Seiten eines Dreiecks zueinander in einem Dreieck mit rechten Winkel.

▷ Ist in einem Dreieck das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Kathetenquadrate, so ist dieses ein rechtwinkliges Dreieck.

Auch die beiden anderen Sätze beschreiben besondere Seitenverhältnisse in einem rechtwinkligen Dreieck.

▷ Höhensatz

~~Ist~~ Ist in einem Dreieck das Quadrat über der Höhe gleich ~~der Summe~~ den beiden Hypotenusenabschnitten miteinander multipliziert, so ist dieses Dreieck rechtwinklig.

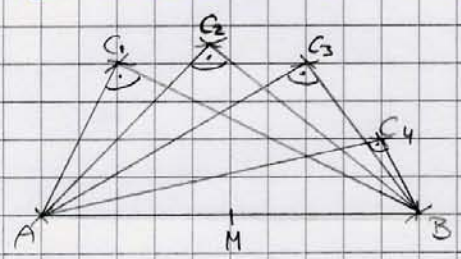
▷ Kathetensatz

Ist in einem Dreieck das Quadrat über einer Kathete gleich dem Produkt aus Hypotenuse und anliegendem Hypotenusenabschnitt, so ist dieses Dreieck rechtwinklig.

Auch am Kreis ~~gibt es einen~~ bzw. seinen Satz, ~~der~~ in dem es um rechte Winkel geht. gibt es einen

▷ Satz des Thales

Die Scheitel aller rechten Winkel über eine Strecke  $[AB]$  liegen auf dem Kreis mit dem Durchmesser  $\overline{AB}$ .





Diese Sätze spielen in der HS insofern eine Rolle, dass sie zwar nachvollzogen, aber weniger der Beweis mathematisch korrekt ~~weist~~ erlernt wird. Es geht v.a. um Berechnungen an Dreiecken und anderen Figuren mit rechten Winkeln, also das Anwenden und Übertragen.

Zuletzt spielt in der Geometrie auch bei Körpern der rechte Winkel eine Rolle. Ähnlich wie bei Figuren in der Ebene ~~werden~~ werden die Körper nach Symmetrien, Seitenlängen und Verhältnissen, Diagonalen- und Mittellinien und mit Winkleigenschaften beschrieben und definiert. Eine besondere Rolle spielt der Winkel bei der dynamischen Definition.

[B] Prisma: \* Statische Definition

Ein gerades Prisma besteht aus ~~einer~~ kongruenten Grund- und Deckfläche, die ein  $n$ -Eck sind, und  $n$  ~~Rechte~~ ~~kongruente~~ Rechtecke als Seitenflächen

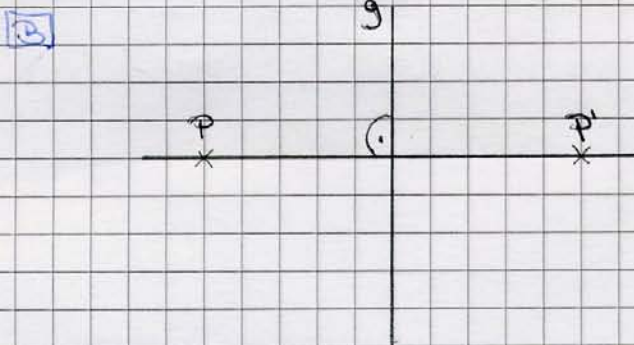
\* Dynamische Definition

Ein gerades Prisma entsteht, wenn ~~eine~~  $n$ -Eck um eine Strecke senkrecht nach oben verschoben wird.

Das Senkrecht in der Prisma-Definition gibt an, dass die Grundfläche senkrecht nach oben verschoben wird, d.h. die Seitenflächen sind Rechtecke, weil die Winkel zwischen Grundseite und Seitenkanten bzw. Deckfläche und Seitenkanten alle  $90^\circ$  betragen.

Darüber hinaus wird auch der Körperinhalt, das Volumen mit Hilfe der Höhen, ~~eine~~ die in einem rechten Winkel auf der Grundfläche <sup>steht</sup>  $V$  berechnet.

[1] Die Achsenspiegelung ~~ist~~ funktioniert durch das Projizieren eines Punktes auf die andere Seite der Spiegelebene. Die Strecke zwischen Ursprung und Bildpunkt ist senkrecht zur Spiegelebene.



Der Bezug zum Sachrechnen ist bei jedem Thema der Mathematik wichtig, um Regeln und Gesetzmäßigkeiten in eine Situation aus dem Lebensumfeld der Schüler zu betten. Auch beim Thema rechter Winkel muss den Schülern der Bezug zu ihrer Umwelt verdeutlicht werden.



## ② Unterrichtseinheit in der 5. Klasse zum Thema „rechter Winkel“

Sachliche und fachliche Analyse:

S. ①

didaktische Analyse:

Wahrscheinlich an  
 Bevor die Schüler im Laufe der Hauptschule Figuren und Körper kennenlernen, ist es wichtig, ~~die~~ die Grundbausteine ~~von~~ dieser Figuren und Körper bzw. der Geometrie kennenzulernen. Diese Handwerksachen oder das Material dürfen aber keinesfalls so lebensfern und theoretisch eingeführt werden wie unter ① erläutert, gerade weil grundlegende Verständnisse wie der „rechte Winkel“ ~~sie~~ immerwieder in verschiedensten Themen eine zentrale Rolle spielen (vgl. ②). Deshalb ist es wichtig, dass das Thema für die Schüler lebensnah erarbeitet wird, sie ein mathematisches Verständnis ~~er~~ erlernen und daneben aber auch einen Bezug zu ihrem Lebensumfeld herstellen können. Der Bezug zum Umfeld der ~~Gerade~~ Gerade in der 5. Klasse ist es wichtig, dass Themen ~~mit~~ neben einer für Kinder lebensnahen Erarbeitung auch vielseitig kennengelernt werden, d.h. mit vielen Sinnen und durch das Ansprechen möglichst vieler Lerntypen. Auch in der „rechte Winkel“-Stunde sollen die Eindrücke eines „rechten Winkels“ möglichst vielseitig und abwechslungsreich sein. Auf eraktiler Ebene, d.h. handelnd, selbst entdeckend, aktiv lernend sind verschiedene Dinge möglich, die den Schülern Gelegenheit bieten „rechte Winkel“ zu erleben, sie herzustellen, sie zu überprüfen und zu messen. ~~Ein~~ <sup>Es</sup> sollen sie Schüler durch Falten eines Papiers selbst einen rechten Winkel herstellen, indem ein Blatt Papier zweimal hintereinander gefaltet wird. + Um auf einer Baustelle, im Garten oder zu Hause im Haushalt rechte Winkel herzustellen gibt es besondere Geräte, das Lot und die Wasserwaage, die anbringen, ob etwas im rechten Winkel zur Erde zum Erdboden ist. Auch diese sollen die Schüler kennenlernen und ausprobieren.

Symbolisch können die Schüler mit ihrem rechten Winkel, den sie gefaltet haben oder dem Geodreieck messen, ~~was~~ wie groß ein Winkel ist bzw. ob der Winkel ein rechter Winkel ist. Innerhalb der ikonischen Darstellungsform können die Schüler können, wie ein rechter Winkel nur mit Hilfe von ~~Orkei~~ <sup>Werkzeug</sup>

~~Es~~ <sup>Sicher</sup> ~~steht~~ wird sowohl im Einleit<sup>gespräch</sup> als auch während der Stunde immerwieder darauf zurückgegriffen.

+ Warum hier ein Bezug zur Berechnung besteht ~~ist~~ und dies ~~so~~ <sup>dennoch</sup> auch bei Winkeln ein besondere Rolle spielt



und lineal (ohne Einheiten ; -)) erstellt werden kann.

Dass Winkel zwischen Geraden und zwischen Ebenen entstehen können, spielt in dieser Stunde keine zentrale Rolle,  $\rightarrow$  dennoch kann kurz darauf eingegangen werden, wenn ein Schüler evtl. in der Einstiegsphase danach fragt bzw. Unsicherheit deshalb aufkommt.  
oder beim Kennenlernen von Lot und Wasserwaage

### Vorkwissen

Die Schüler kennen bereits aus der Grundschule ~~die~~ <sup>die</sup> Namen und das Aussehen einzelner Figuren (Rechteck, Dreieck, ...)

Direkt in den Stunden vor der „rechten Winkel“-Stunde haben die Schüler bereits den Begriff „Winkel“ kennengelernt und mit dem Geodreieck Winkel gemessen. Den rechten Winkel als besonderen Winkel haben sie nicht kennengelernt.

### Ziele:

Großziel  $\rightarrow$  Die Sch ~~kennen~~ <sup>kennen und können</sup> den rechten Winkel als besonderen Winkel ~~kennen~~ <sup>nachvollziehen</sup>.

Feinziele  $\rightarrow$  Die Schüler wissen wie groß ein rechter Winkel ist.

$\rightarrow$  Die Schüler erkennen die Besonderheit/Häufigkeit rechter Winkel in ihrem Lebensumfeld.

$\rightarrow$  Die Sch können einen rechten Winkel messen, mit dem Geodreieck und mit anderen Hilfsmitteln (Lot, Wasserwaage), d.h. in der Ebene und im Raum.

$\rightarrow$  Die Sch ~~kennen~~ <sup>lernen wie man einen</sup> rechten Winkel konstruiert.

$\rightarrow$  Die Sch erkennen, dass vier rechte Winkel  $360^\circ$ , also ein Vollwinkel sind.  
(Bezug zum Rechnen)

$\rightarrow$  Die Sch's üben den Umgang mit Zirkel und Lineal



# Stundenverlauf

Zeit Argumentationsstufen

Material

7 Lehrer legt Folie auf (st. Impuls)  
 Sch's erinnern sich, dass sie Winkel gemessen haben  
 Sch's kommen vor und messen Winkel  
 Sch's erkennen, dass  
 → bei Hundertwasser gibt es keine Winkel  
 → bei Fachwerkhäuser viele verschiedene  
 → bei Räumgebäude fast immer 90°

Folie mit modernen Haus, Fachwerkhäuser und Hundertwasserh.  
 L-S-Gespräch (S entdecken)

L erklärt, dass 90° überall im Alltag oft vorkommt, deshalb hat er extra Name bekommen: „rechter Winkel“

5 L fragt an, wie werden rechte Winkel bei Haus gemessen? (Geodreieck?!)

L-S-Gespräch (L erzählt v.a.)

Schüler vermuten und erkl. kennt einer Lot oder Wasserwaage

L stellt Geräte vor

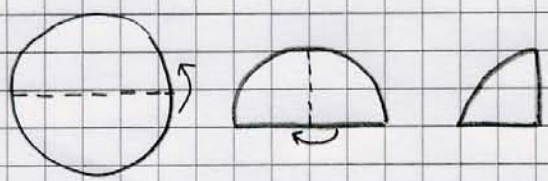
Lot, Wasserwaage

→ Name  
 → Funktionsweise erklären  
 Sch darf an Türhaken, Tisch o.ä. ausprobieren

10 Geräte aus Haushalt/Bausette sind für Mattheft eher ungeeignet  
 Sch's überlegen was sie zum Messen rechter Winkel verwenden könnten (wenn kein Geodreieck dabei)

Kreise aus Papier

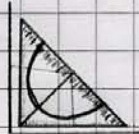
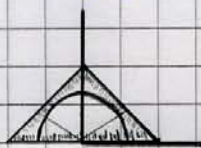
[B] Schulheft hat rechte Ecke / Kästchenpapier  
 L teilt Kreise aus und erklärt, dass Sch's rechten Winkel herstellen sollen  
 Sch's teilen aus  
 Zusammentragen der Ideen  
 → Kreise einmal falten  
 → Halbkreis nochmal falten



erte. beschreiben Sch's Vorgehen mit „den Viertel von einem Ganzen sind 90°“ oder ähnlichen  
 → hier besteht der Bezug zur Bruchrechnung (wird in der HA)



- 5 L erklärt trotz selbst gezeichnetem rechten Winkel noch einmal wie  $90^\circ$  mit dem Geodreieck gemessen werden  
 → Gradzahl ablesen  
 → hintere Ecke anlegen



Sch's testen, ob Schulbund, Mattheft tatsächlich  $90^\circ$  an den Ecken

- 15 L erklärt dass Geodreieck zum Nach-messen <sup>und zeichnen</sup> in der Schule erlaubt ist, aber eigentlich gibt es in Geometrie nur ein Lineal (ohne Skalierung) und einen Zirkel, um Winkel zu konstruieren

L zeigt an der Tafel Vorgehen

- Gerade zeichnen
- 2 Punkte notieren
- eine beliebige Radius einstellen
- an beide Punkte antragen
- es gibt 2 Schnittpunkte
- verbinden

→ Geraden schneiden sich in  $90^\circ$   
 Sch's <sup>zeichnen</sup> einführen in ihr Heft (nicht auf Kästchen!) Heft  
 ↳ 3. Tafelbild

- L gibt Hilfestellung
- Sch's helfen sich einkl. gegenseitig
- L ergänzt überschrift und Sch's schreiben ins Heft

„der rechte Winkel - ein besonderer Winkel“  
 Sch' sollen Kreis somit ins Heft kleben, dass sie rechten Winkel wieder finden können (K festkleben)

- 3 Sch sollen HA-Stellung unter Heftbeitrag notieren  
 „Gibt es noch andere besondere Winkel, die du ohne Geodreieck herstellen kannst?“

→ L erklärt wie vorgegangen werden soll

→ durch Falten sollen andere Winkel gefunden werden (alle gleich groß!)

→ nicht jeder muss drei finden

Geodreieck

L erklärt

L erklärt

Tafel  
 Zirkel  
 Lineal

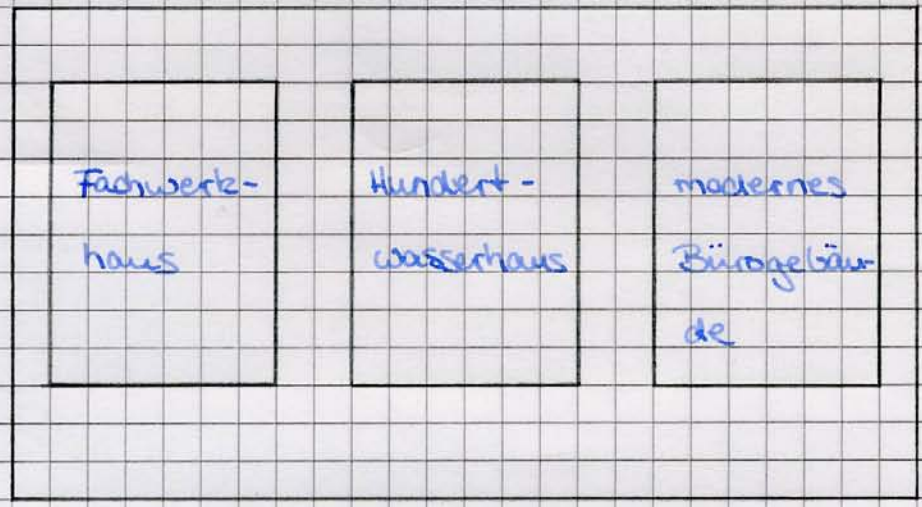
Heft  
 Zirkel  
 Lineal

Heft  
 Zweifache Kreise

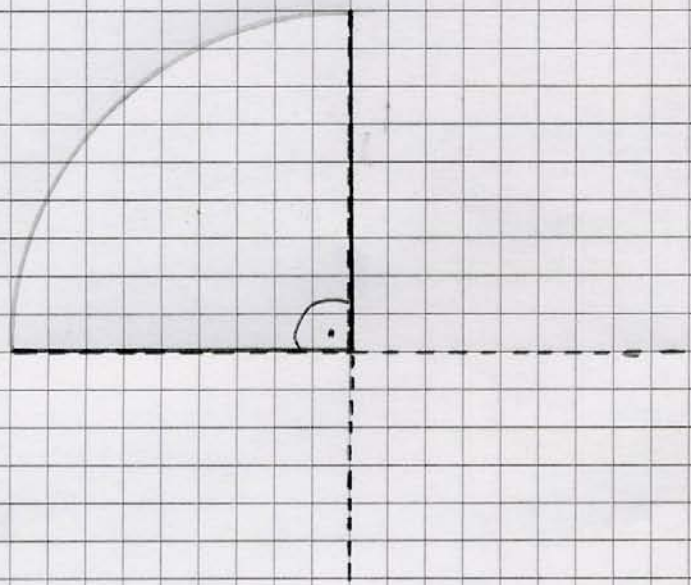


Material:

→ Einstiefflie



⇒ Krise aus Tonpapier (nicht zu labberig und nicht zu fest)



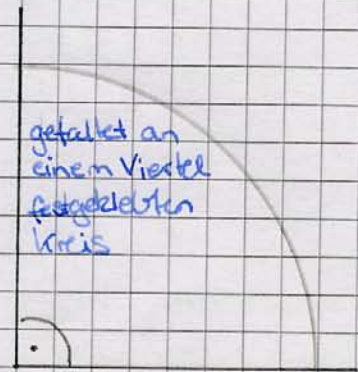
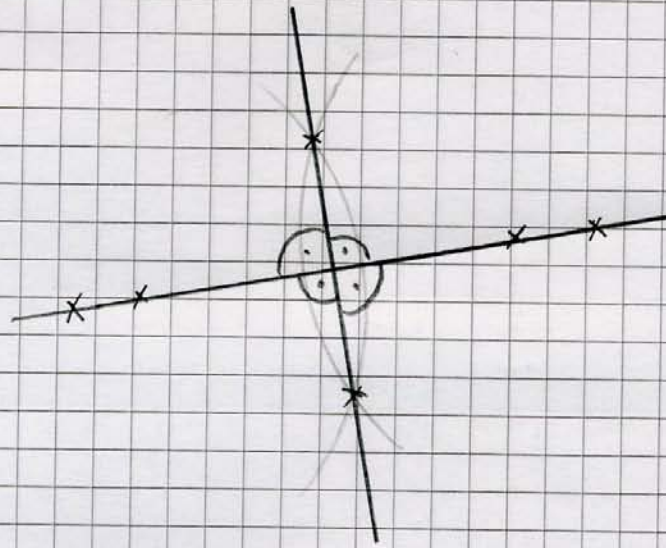
→ Lat (Polsterschnur mit Gewicht unten dran)

→ Wasserwaage (ja, damit kann man auch parallel zum Boden messen, aber viele haben oben noch ein zweites Messfenster, das senkrecht misst) :-)



→ Tafel / Heft

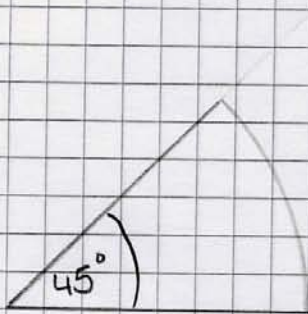
der rechte Winkel - ein besonderer Winkel



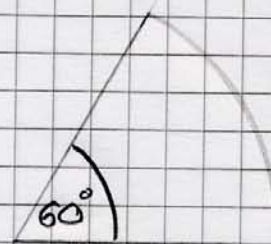
Gibt es noch andere besondere Winkel, die du ohne Geodreieck herstellen kannst?

**B**

einen rechten Winkel nochmal falten

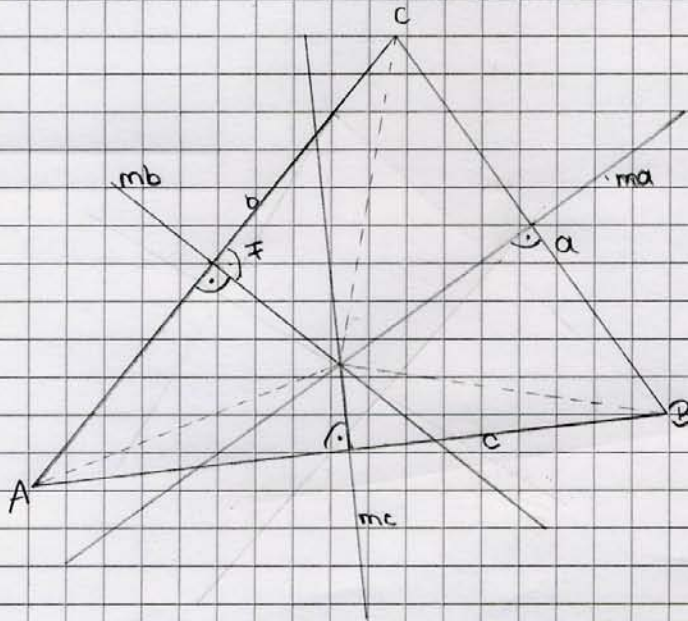


Kreis einmal halbieren (180°)  
Halbkreis dritteln (evtl. bisschen ungenau)  
→ es geht um das Vor-  
gehen an sich :-)





④ Konstruktion des Umkreismittelpunktes beschreiben und begründen



Im allgemeinen Dreieck gibt es besondere Strahlen.

- <sup>alle</sup> ~~Die~~ Seitenhalbierenden treffen sich in einem Punkt, dem Schwerpunkt
- ~~Die~~ Alle Höhen schneiden sich in einem Punkt. Dieser teilt diese im gleichen Verhältnis
- Alle Winkelhalbierende treffen sich in einem Punkt, dem Innenkreismittelpunkt.
- Der Mittelpunkt des Umkreises in einem allgemeinen Dreieck ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten.

Vorgehen Wie im Unterricht (s. ③) ermittelt die Mittelsenkrechte wie folgt konstruiert: Sie steht senkrecht auf einer gegebenen Gerade (hier  $\overline{AB}$ ) und jeder Punkt der Mittelsenkrechten ist gleichweit von A und B entfernt.  
 Ein beliebiger Radius  $r$  wird an beiden Punkten angetragen. Auf jeder Seite der Strecke  $\overline{AB}$  gibt es genau einen Schnittpunkt. Dieser Punkt ist von A und B gleichweit entfernt (weil gleicher Radius).  
 Beide Punkte verwechselt, ergeben die Menge aller Punkte, die von A und B gleichweit entfernt sind, die Mittelsenkrechte.



## Begründung

Behauptung: Schneiden sich in einem Dreieck die Mittelsenkrechten in einem Punkt, so ist dies der Umkreismittelpunkt.

Voraussetzung: alle 3 Mittelsenkrechten schneiden sich in einem Punkt

was sich gezeigt werden: dieser Punkt ist Umkreismittelpunkt

Idee: die Dreiecke  $\triangle ABH$ ,  $\triangle AHC$  und  $\triangle BHC$  sind gleichschenkelig

- gleichschenkelig heißt, dass das Dreieck in 2 Kongruenzen zerlegt werden kann
- wird an  $\triangle ABH$  gezeigt

$$\textcircled{1} \overline{AD} = \overline{DB} \quad (\text{Mittelsenkrechte teilt } \overline{AB} \text{ 1:1 und } \perp \text{ ist Schnittpunkt})$$

$$\textcircled{2} \overline{HD} = \overline{HD}$$

$$\textcircled{3} \sphericalangle HDA = \sphericalangle BDH = 90^\circ \quad (\text{Mittelsenkrechte steht } 90^\circ \text{ auf } \overline{AB})$$

⇒ SWS

$$\Rightarrow \triangle AHD \cong \triangle BDH$$

→ auch die anderen Dreiecke  $\triangle BCH$  und  $\triangle ACH$  sind gleichschenkelig

→ die benachbarten Dreiecke haben je einen Schenkel gemeinsam

→ alle 3 Schenkel sind gleichlang

$$\overline{AH} = \overline{BH} = \overline{CH}$$

→ die Länge der Schenkel ist der Radius des Umkreises