Thema 3

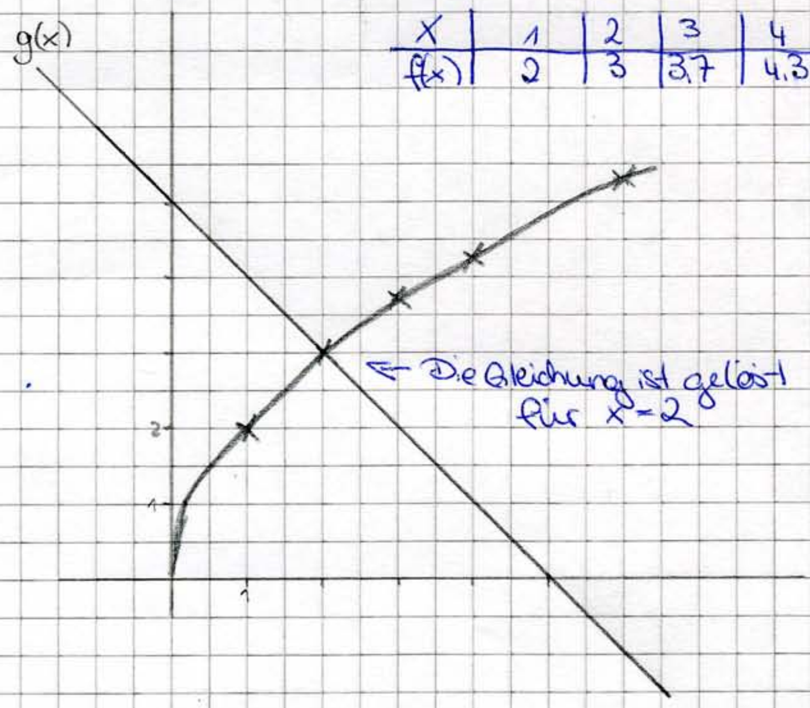
Aufgabe [1]

Die grafische Lösung der Wurzelgleichung $\sqrt{5x-1} = -x+5$ ist auf zweifacher Weise möglich. (Zur Information: ich beziehe mich in den weiteren Ausführungen stets auf das gegebene Beispiel, welches die allgemeine Wurzelgleichung $\sqrt{ax+b} = cx+d$ repräsentiert)

Eine erste Lösung ist der Schnittpunkt der ggf. Funktionen $f(x) = \sqrt{5x-1}$ und $g(x) = -x+5$. Die Lösung ergibt sich, wenn beide Funktionen gezeichnet werden und deren Schnittpunkt ist der Punkt, an dem beide Funktionen gleich sind, sodass die Gleichung aufgeht.

Wertetabelle für $f(x) = \sqrt{5x-1}$

x	1	2	3	4	6
f(x)	2	3	3,7	4,3	5,4



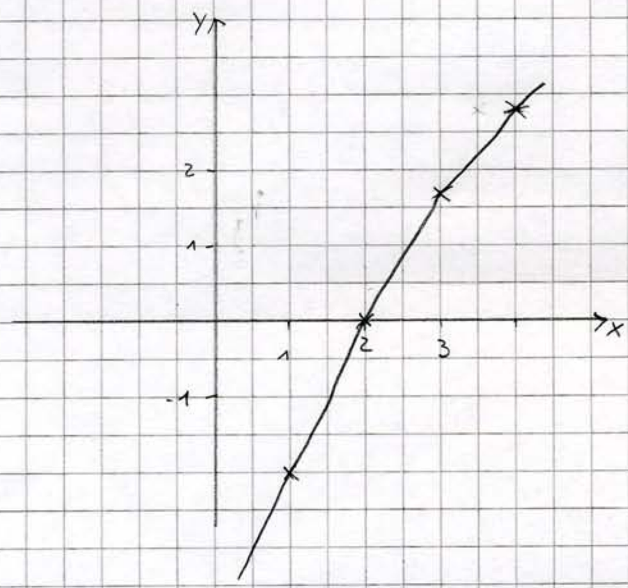
Die zweite grafische Lösung entspricht dem Suchen nach einer Nullstelle von der ggg. Fkt $h(x) = \sqrt{5x-1} + x - 5$.

~~Auf~~ Die Fkt erhält man, wenn man die Gleichung durch eine Äquivalenzumformung auf die linke Seite bringt. Setzt man diese Fkt gleich Null so ist die Gleichung gelöst, wenn der Funktionswert Null auch tatsächlich eingenommen wird.

Also ist die Lösung:

Wertetabelle zu $h(x) = \sqrt{5x-1} + x - 5$

x	$\frac{4}{5}$	1	2	3	4
$h(x)$	$-\frac{24}{5}$	2	0	$1{,}7$	$2{,}8$



Vorteile der grafischen Lösung sind das Üben des Zeichnens. Hier werden Funktionen gezeichnet, sodass die Schüler ihre künstlerische Fähigkeiten schulen können. Außerdem erlernen sie, wie man anhand von zuvor errechneten Wertetabelle, Funktionen zeichnet. Weiterhin ist die Verbildlichung der Gleichung eine Hilfe besonders für schwächere Schüler. Mit Hilfe der Zeichnung können die

Schüler nachvollziehen, warum und wie sich die Lösung ergibt. Negativ an der grafischen Lösung ist die Ungenauigkeit. So ist vorallem bei der Schnittpunktbestimmung nicht exakt berechnet, wo die Gleichung aufgeht. Man kann nur eine Vermutung anstellen. Desweiteren ist die grafische Lösung zeitaufwendiger als eine algebraische Lösung. So muss für die grafische Lösung zuerst eine Wertetabelle erstellt werden, bevor man dann ~~auf~~ die Zeichnung anfertigt. ~~Weiterhin negativ ist, dass man nicht exakt weiß, ob es nicht noch weitere Lösungen gibt, wenn man für x → ∞ geht~~

Bei der algebraischen Lösung handelt es sich um Äquivalenzumformungen. Dabei muss allerdings die Wurzel weg-quadriert werden, sodass eine schülergerechte Lösung zustandekommt. In unserem Fall würde man beide Terme quadrieren und man würde erhalten.

$$\sqrt{5x-1}^2 = (-x+5)^2$$

Durch die Verwendung der 2. Binomischen Formel erhält man

$$5x-1 = x^2 - 10x + 25$$

Durch die Äquivalenzumformung bringen wir den rechten Term auf die linke Seite, also

$$-x^2 + 15x - 26 = 0$$

Mit Hilfe der Mitternachtsformel oder der p,q - Formel erhalten wir: $p = -15$ $q = 26$ $x_{1/2} = \frac{15}{2} \pm \sqrt{\frac{15^2}{4} - 26}$, $x_1 = 2$, $x_2 = 13$

Somit löst $x = 2$ und $x_2 = 13$ die Gleichung

Bei der algebraischen Lösung fehlt die Verbildlichung der Lösung. Somit ist es eine ~~reines~~ Rechenaufgabe, die wenn man sie den Schülern falsch beibringt, einfach stupide immer wieder nach den gleichen Lösungsalgorithmus heruntergerechnet wird, ohne dass die Schüler wissen um was es sich dabei handelt.

Ein weiterer Nachteil der algebraischen Lösung einer Wurzelaufgabe ist, dass sie auch irreführen kann und eine Lösung (hier $x = 13$) anbietet, die die Gleichung gar nicht löst.

~~Dies kommt durch das Quadrieren zustande, welches~~

Vorteilhaft ist die Wiederholung der binomischen Formeln. Sie können mit Hilfe der Wurzelgleichung noch intensiver eingeübt werden und somit den Schülern auch in ihrer Wichtigkeit bewusst werden. Darüberhinaus wird den Schülern anhand dieser Wurzelgleichung deutlich, dass die Wurzelfunktion die Umkehrfunktion einer Quadratfkt ist und das ~~sich~~ somit die Wurzelfkt verkettet mit der Quadratfunktion die identische Abbildung darstellt.

~~Außerdem~~

Es ist sinnvoll den Schülern beide Lösungswege vorzustellen, weil ein Teil der Schüler eher den zweiten Lösungsweg für einfacher erachtet. Aber stets ist daraufhinzuweisen, dass man ~~bei~~ der Berechnung der Aufgabe achtsam sein muss, um etwaige Fehler zubeheben.

Aufgabe 2

Wir gehen zuerst auf die exakten Methoden ein.

Zu nennen wäre hier eine Äquivalenzumformung.

Hierbei ist zu beachten, dass man versucht, die gesuchte Variable, mit Hilfe von elementare Rechenoperationen, so umzuformen, dass sie durch einen Wert ausgedrückt wird.

Bsp:

$$3x + 4 = 12 + 2x \quad | -2x$$

$$x + 4 = 12 \quad | -4$$

$$x = 8$$

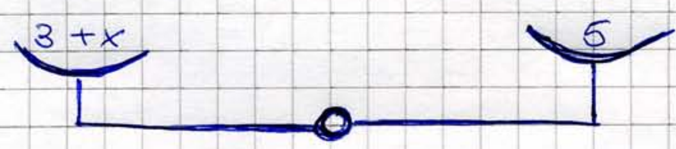
Eine weitere exakte Methode des Gleichunglösen ist in der Realschule vorallem das Benutzen des Taschenrechners. Sowohl die grafische Darstellung einer Gleichung als auch eine algebraische Lösung sind neuerdings mithilfe des Taschenrechners exakt zu erhalten. So kann man bei der grafischen Darstellung zwischen der Schnittpunktbestimmung, als auch der Nullstellenbestimmung (siehe Aufgabe 1) auswählen. ~~Im weiteren~~ Nachdem die grafische Taschenrechner die Funktion gezeichnet haben, kann man den Taschenrechner auffordern, den ggf. Schnittpunkt zu suchen und ihn anzuzeigen. Somit erhält man einen genauen Wert des Schnittpunktes. Mit der Nullstellenberechnung läuft ei analog. Es wird also über das reine Ablesen eines Schnittpunkts und damit eines Schätzens der x-Werte hinausgegangen, hin zu einem vom Taschenrechner ermittelten Schnittpunkt.

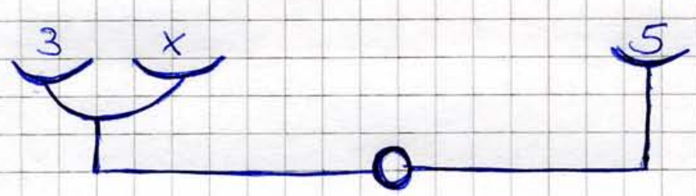
Die algebraische Lösung ist ebenso kein Problem für die neuere Taschenrechner. Hierbei wird die Gleichung einfach in das dazugehörige Fenster eingegeben und der Taschenrechner ermittelt die Lösung der Gleichung.

Die gleichen exakten Ergebnisse, wie sie mit dem Taschenrechner berechnet wurden, erhält man auch mithilfe von computerunterstützten Programmen wie Geogebra und Derive. Hierbei ist negativ zu vermerken, dass nicht jeder Schüler in der Mathematikstunde vor einem PC sitzt, an den er mit diesem Programmen arbeiten kann.

Zu ~~Bei~~ den probierenden Methoden des Gleichungslösen in der Realschule gehört das Waage-Modell. Diese Methode wird vor-allem in den frühen Klassenstufen angewandt.

Das Waagemodell stellt eine Gleichung ~~als~~ als Waage dar, wobei die linke Seite und die rechte Seite ausgewogen sein sollen. Bsp. $3 + x = 5$



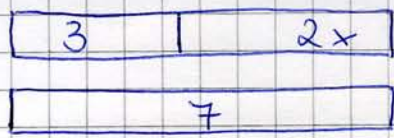


Welche Zahl muss für das x eingesetzt werden, damit die Waage ausgewogen ist. Diese Probiermethode lässt sie sehr gut mit einer echten Waage im Unterricht durchführen.

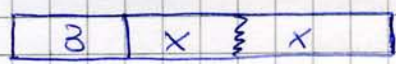
Eine weitere probierende Methode des Gleichungslösens ist die Streifenmethode. Auch hierbei handelt es sich für eine Methode, die in der 5./6. Klasse angewandt werden kann.

Die 2 Terme der Gleichung ~~wird~~ werden vorgestellt als zwei Streifen. Dabei sollen aber beide Streifen gleichlang sein.

Bsp: $3+2x=7$



aus dem linken Term folgt



Welche Zahl kann man für x einsetzen, sodass $2 \cdot x + 3$ die gegebene Länge von 7 erfüllt.
Bei dieser Methoden kann man auch sehr gut mit Geodreieck und Lineal die Werte für x ermitteln. Hierbei stellt man sie Werte als Längen vor mit der Maßeinheit an.

Eine weitere probierende Methode ist das Näherungsverfahren, dass vorallem in den Abschlussklassen der Realschule zum Zuge kommt. So ist die Lösung einer Exponentialgleichung nicht auf den ersten Blick erkennbar. Ziel des Näherungsverfahrens ist es, die gesuchte Lösung ~~auf eine Zahl~~ zu bestimmen, indem man sich immer wieder der Lösung schrittweise nähert.

Bsp: $2^x = 7$

Wir betrachten $x \in [2,3]$

$$2^2 = 4 < 7 < 8 = 2^3$$

Wir nähern uns an die Zahl x, die für $2^x = 7$ ergibt.
Der nächste Versuch lautet: x liegt zwischen 2,8 und 2,9, also

für $x \in [2{,}8 , 2{,}9]$ $\quad 2^{2,8} = 6{,}96 < 7 < 7{,}46 = 2^{2,9}$

nächster Schritt: $\quad x \in [2{,}805 , 2{,}81]$

für $x \in [2{,}805 , 2{,}81]$ $\quad 2^{2,805} = 6{,}988 < 7 < = 7{,}01 = 2^{2,81}$

Es wird so lange probiert, bis man eine Lösung findet oder die ~~gesuchte~~ gefundene Zahl die Lösung fast darstellt.

Aufgabe 3

1. Sachanalyse

Für die Sachanalyse ist von Bedeutung, wie man mit Hilfe eines Taschenrechners auf die Lösung einer Wurzelgleichung gelangt. Wir beschränken uns in der Unterrichtseinheit auf die grafische Lösung einer Wurzelgleichung. Diese entspricht dem in Aufgabe 1 dargestellten Schnittpunkt- und Nullstellenproblem.

Der Schüler gibt die Gleichung in seinen Taschenrechner ein und lässt sich die Gleichung zeichnen. Um die gesuchte Lösung zu erhalten, kann er einerseits den Taschenrechner auffordern den Schnittpunkt bzw. ~~die~~ Nullstellen der Gleichung zu ermitteln oder der Schüler kann so lange an den gesuchten Punkt heranzoomen, sodass er ihn mit ziemlicher Genauigkeit angeben kann

2. Voraussetzungen

Der Schüler hat Wurzelgleichungen auf algebraischer und grafischer Ebene gelöst. Ebenso ist er mit dem Grafiktaschenrechner vertraut und kann Funktionsgraphen darin zeichnen lassen. Außerdem handelt es sich um eine Doppelstunde.

3. Lernziele

Grobziel: • Der Schüler soll eine Wurzelgleichung mit Hilfe eines Grafiktaschenrechners grafisch lösen.

• Der Schüler ~~lernt~~ übt zwei Methoden der grafischen Lösung einer Gleichung ~~kennen~~ mit dem Taschenrechner ein

Feinziele: • Der Schüler soll eine Wertetabelle erstellen können und seine Wertetabelle mit der des Taschenrechners vergleichen.

• Der Schüler soll das Zeichnen von Graphen wiederholen.

• Die Schüler sollen lernen mit dem Taschenrechner zu arbeiten.

4. Methodisch-Didaktische Analyse

An den Anfang der Stunde setze ich eine Wiederholung der grafischen Lösung einer Gleichung an. Hierbei soll im Lehrer-Schüler Gespräch nochmals auf die zwei Methoden eingegangen werden, die für die grafische Lösung benötigt werden. Der Lehrer bringt hierfür eine Folie mit, um die Methoden für alle klar zu verdeutlichen.

Bei der Problemstellung erhalten die Schüler ein Arbeitsblatt mit einer Wurzelgleichung, sowie einer noch auszufüllenden Wertetabelle und einem Koordinatensystem. ~~Die Lösungen der Wertetabelle wieder von den Schülern einzeln vorgetrag nacheinander vorgetragen, damit die Schüler sehen, wie zeitaufwendig ist ist, eine Wertetabelle anzufertigen. Der Graph~~

Es wird in der Klasse abgestimmt nach welcher Methode die Gleichung gelöst werden soll. Nachdem dies erfolgt ist werden ~~jeder~~ 10 Schüler beauftragt einen Funktionswert auszurechnen. Nachdem die Tabelle somit ausgefüllt ist, ~~wird~~ zeichnet jeder Schüler einzeln seinen Graphen auf das Arbeitsblatt und erhält die Lösung.

Mit der Überleitung des Lehrers „Das geht auch schneller" verweist er auf den grafischen Taschenrechner.

In Gruppenarbeit sollen die Schüler die gleiche Aufgabe nochmals mit ihren Grafiktaschenrechner bearbeiten. ~~Dabei~~

Ihre Vorgehensweise sollen sie dabei auf eine Folie schreiben welche den anderen vorgestellt wird. Es werden 4 Gruppen gebildet, von denen jeweils 2 die Schnittpunktmethode und 2 die

Nullstellenbestimmung mit Hilfe des Taschenrechners bearbeiten. Der Lehrer ist während der Gruppenarbeit als Berater an der Seite der Schüler. Die Präsentation der Ergebnisse übernimmt jeweils ein Schüler der Gruppe. Die zwei besten Vorgehensweisen werden in das Heft übertragen.

Zur Sicherung werden noch zwei weitere Aufgaben den Schülern gestellt, mit dem Arbeitsauftrag, diese mit Hilfe des Grafiktaschenrechners zu lösen.

Zur Vertiefung sollen die Schüler sich selbst schwierige Gleichungen ausdenken, die sie mit Hilfe des Taschenrechners dann auch lösen können.

⑤ Unterrichtablauf

1. Hinführung

Der Lehrer wiederholt ~~die~~ mit den Schülern die grafische Lösung einer Gleichung. Zur besseren Übersicht legt der Lehrer am Ende der Wiederholung eine Folie mit den zwei Methoden der Lösung auf.

2. Problemstellung

Nun wird eine weitere Aufgabe mit Hilfe der grafischen Lösung erarbeitet. Dies soll den Schülern zeigen, wie lang eine grafische Lösung normalerweise dauert.

3. Problemlösung

Zehn Schüler erarbeiten auf dem zuvor ausgeteilten Arbeitsblatt die Werte für ein x ~~und~~ der Gleichung

$\sqrt{x+1} = 3$. Diese Werte stellen sie der Klasse nacheinander vor und alle anderen, die die Werte ebenso ausgerechnet haben, vergleichen sie mit den vorgestellten.

Danach zeichnet jeder Schüler seine Funktionsgraphen auf das Arbeitsblatt.

4. Problemstellung „2"

Nach der schriftlichen Aufgabenlösung wird den Schülern aufgetragen diese Gleichung $\sqrt{x+1} = 3$ mit dem Taschenrechner zu lösen.

5. Problemlösung „2"

In Gruppenarbeit bearbeiten jeweils 2 Gruppen die Lösung mit dem Suchen des Schnittpunktes und die Lösung mit der Bestimmung der Nullstellen.

Um eine genaue Lösung zu erhalten, werden die beauftragt die Funktionen des Taschenrechners zu nutzen, sodass sie einerseits an die Lösung heranzoomen können oder andererseits die Nullstelle oder den Schnittpkt exakt ermitteln lassen können.

6. Sicherung

Beide Wege sollen auf die Folie als Lösungsweg beschrieben werden. Die beste Folie wird von den Schülern in ihr Schulheft übertragen.

Außerdem werden den Schülern noch zwei weitere Aufgaben gegeben, um das Gelernte zu festigen

7. Vertiefung

In der Vertiefung können sich die Schüler selbst abstrakte Gleichungen überlegen, die dann der Taschenrechner lösen soll. Dabei sollen sie aber auch merken, dass nicht jede Wurzelgleichung gelöst werden kann, wie z.B.

$$\sqrt{2 - 4x} = 3$$

Die Schüler sollen ~~b~~ aber auch wissen, warum diese Gleichung nicht aufgeht.