~~Aufgabe 3~~ Thema 3:

1. Erläutern und vergleichen Sie, wie Wurzelgleichungen der Art $\sqrt{a \cdot x + b} = c \cdot x + d;\ a, b, c, d \in \mathbb{R}$ grafisch und algebraisch gelöst werden können (Beispiel: $\sqrt{5x-1} = -x+5$).
Gehen Sie dabei insbesondere auch auf Vor- und Nachteile der beiden Verfahren ein.

algebraische Lösung der Beispielaufgabe:

Vorüberlegungen: Man kann die beiden Terme auf der rechten und linken Seite als Funktionen auffassen, indem wir beide gleichsetzen, berechnen wir ~~die x~~ zunächst die x-Werte der Schnittpunkte:

$\sqrt{5x-1} = -x+5$ | um die Wurzel aufzulösen quadrieren wir beide Seiten

$5x-1 = (-x+5)^2$ | die rechte Seite ist nun eine binomische Formel die es aufzulösen gilt

$5x-1 = x^2-10x+25$ | nun gilt es die quadratische Gleichung ~~aus~~ auszurechnen

~~$0 -$~~

$0 = x^2 - 15x + 26$ | Anwendung eines Lösungsverfahrens

Wir wählen hier die „Mitternachtsformel"

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

mit $a = 1$, $b = -15$, $c = 26$

$$x_{1/2} = \frac{15 \pm \sqrt{15^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a}$$

$$= \frac{15 \pm 11}{2}$$

Somit erhalten wir für $x_1 = 13$ und $x_2 = 2$.
Da die Schüler auch schon quadratische Funktionen kennen wird es zunächst nicht verwundern, dass 2 x-Werte, somit 2 Schnittpunkte berechnet werden.
Um die y-Koordinaten noch zu erhalten, müssen wir die x-Werte in eine der beiden Funktionsgleichungen einsetzen.

Wir wählen $g(x) = -x + 5$ und erhalten somit: $SP_1 (13/-8)$, $SP_2 (2/3)$

Grafische Lösung der Beispielaufgabe.

Wie zuvor schon erwähnt betrachten wir unsere Terme auf der rechten und linken Seite als die Funktionen

$f(x) = \sqrt{5x-1}$ und $g(x) = -x+5$

Diese werden wir nun in ein Koordinatensystem einzeichnen.

Vorüberlegungen: ist $f(x)$ als Wurzelfunktion für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert?

Antwort: Der Diskriminant darf nicht negativ werden.

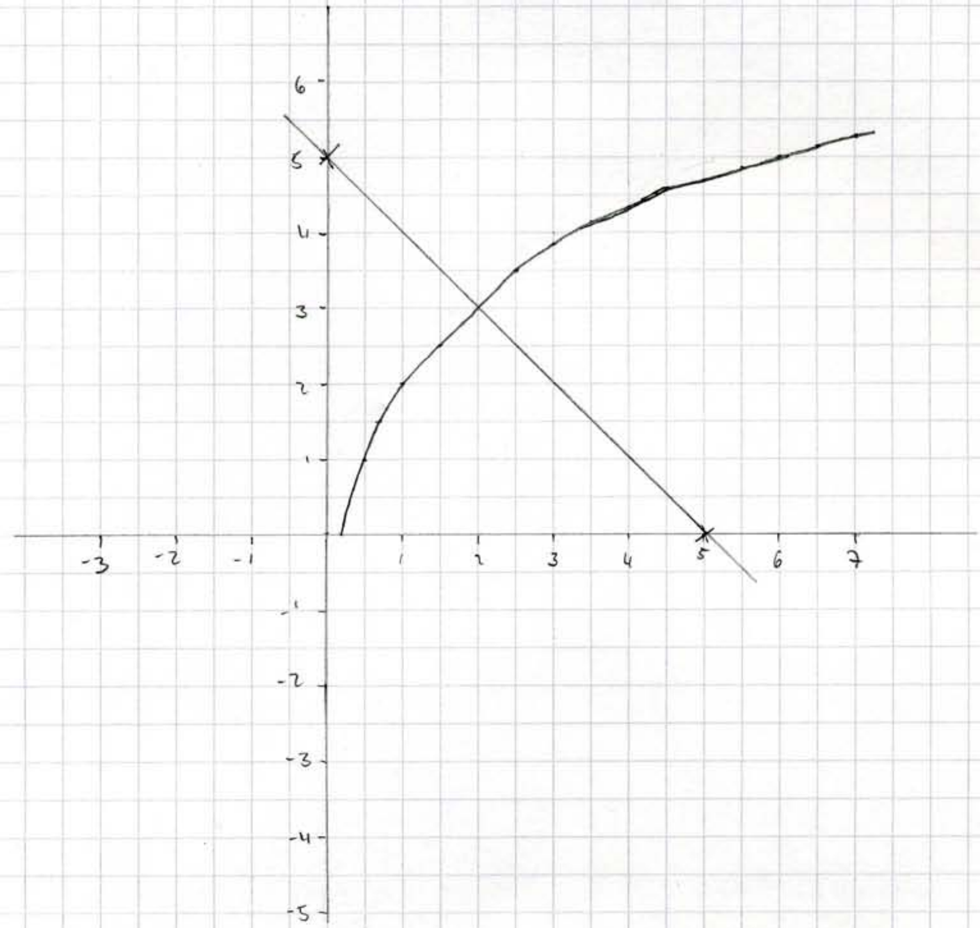
Somit bestimmen wir zunächst die Definitionsmenge $\mathbb{D}$:

$$5x - 1 \geq 0 \quad | +1$$

$$5x \geq 1 \quad | :5$$

Somit ergibt sich $x \geq \frac{1}{5}$ und

~~DER~~ $\mathbb{D}: \{ x \in [\frac{1}{5} ; \infty[\}$



Die gemeinsamen Punkte können nun anhand der Zeichnung abgelesen ~~we~~ werden. Somit erkennt man: SP (2 / 3)

Betrachtet man nun die algebraische und die grafische Lösung zusammen, dann kommen bei den Schülern wahrscheinlich Fragen auf.

Beim algebraischen Lösungsverfahren haben wir 2 Schnittpunkte berechnet, beim grafischen konnten wir nur eine bestimmen.

Warum ist das so?

~~Schülern~~ Um auf dieses Problem hinzuführen, würde ich Schülern zunächst die Frage stellen. Welche Zahl mit sich selbst multipliziert ergibt 4?

Die Antwort lautet 2 und -2.
Somit hat die Gleichung $\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{4}$ sowohl die Lösung $x_1 = 2$ als auch die Lösung $x_2 = -2$.

Dieses Problem tritt bei der Erstellung der Wertetabelle ~~auf~~ für unsere Funktion $f(x)=\sqrt{5x-1}$ auf.
Wir zeichnen diese allerdings aufgrund der Bestimmungen für Funktionen nur positive x-Werte, worauf wir hier nicht näher eingehen wollen.

algebraische Lösungsweg:

Vorteile	Nachteile
- liefert exakte Lösungen	- wenig anschaulich
- schult mehrere mathematische Grundkenntnisse (quadrieren, lin. Formeln Gleichungslösen)	- Schüler verinnerlichen einen vorgegebenen Lösungsalgorythmus
	- man bekommt Lösungen, die nicht im Definitionsbereich liegen

Grafischer Lösungsweg:

Vorteile	Nachteile
- die Problemstellung wird veranschaulicht	- keine exakten Lösungen
- Schüler können sich unter der Lösung etwas vorstellen	- schult nur geringfügig mathematische Lösungsverfahren (algebraische)
- vermittelt Erfolgserlebnisse, Spaß am Lernen	- oftmals zeitaufwändiger

Es gibt viele Vorteil und Nachteile beider Lösungsverfahren, allerdings denke ich, dass man sie gemeinsam behandeln soll, da sie sich sehr gut ergänzen. Zusammen das mathematische Verständnis fördern und den Schülern nicht nur ~~stare~~ sture Lösungsalgorythmen vorgesetzt werden.

2. Erläutern sie exakte und probierende Methoden des Gleichungslösens in der Realschule.

So eben sind die Vor- und Nachteile des algebraischen Lösungswegs und des grafischen Lösungswegs genauer erläutert worden.
Der algebraische Lösungsweg liefert hierbei exakte Lösungen, während der grafische oft nur ungefähr abgelesen werden kann.

Beim Einstieg des Themas ~~Thema~~ Gleichungen kann man auch anhand von probieren einfacher Gleichungen lösen.

Bsp.: $2x - 3 = -1$

Hierbei hat man die Funktionen $f(x) = 2x - 3$
und die konstante Funktion $g(x) = -1$.
In diesem Fall ist nur die linke Seite der Gleichung variabel, somit ist schnell zu erkennen, dass die Gleichung für $x = 1$ lösbar ist.
Dieser Lösungsweg ist allerdings nur für einfache Gleichungen und für $x \in \mathbb{N}$ sinnvoll, um ein erstes Verständnis um einen ersten Umgang mit Gleichungen aufzubauen.

Desweiteren ist es gut möglich Gleichungen anhand des „Waagemodells“ zu erläutern.
Hierbei kann gut verdeutlichent werden, dass bei Gleichungen nur Äquivalenzumformungen zulässig sind, so dass die „Waage stets in Einklang bleibt“.
Beispiel:

Auf dem linken Teller stehen 4 Dosen, auf dem rechten 2 Dosen und ein 1kg-Block. Alle Dosen wiegen gleich viel.
Wieviel wiegt eine Dose?
Es lasst sich verdeutlichen, dass ich auf beiden Seiten stets das gleiche wegnehmen oder hinzufügen darf
zugehörige Gleichung:

$$
\begin{aligned}
4x &= 2x + 1 \quad &&| -2x \\
2x &= 1 \quad &&| :2 \\
x &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Somit können die Schüler durch wegnehmen von Dosen schnell erkennen, dass eine Dose $\frac{1}{2}$ kg wiegt.

Nachteil ist hier ebenfalls, dass man diese ~~Me~~ Methode nur bei ~~etw~~ einfachen Rechnungen verwenden kann.

Desweiteren kann man, um ein besseres Verständnis von Gleichungen zu erhalten Computerprogramme verwenden. ~~Hie~~ Hierbei ~~läßt~~ lassen sich bestimmte Zusammenhänge sich gut erläutern.
Beispielsweise warum es bei linearen Gleichungen eine oder keine Lösung gibt. Oder warum quadratische Gleichungen eine, zwei oder keine Lösungen besitzen.
Das geometrische Verständnis wird gestärkt, zudem kann man die ~~G~~ gegeben Gleichungen zu erst algebraisch berechnen und anschließend die Lösung anhand der Graphen vergleichen oder die Schnittpunkte exakt anzeigen ~~können~~ lassen.
So haben die Schüler mit Computerprogrammen stets eine Kontrolle.

3. Entwickeln sie eine Unterrichtseinheit, mit den Wurzelgleichungen mit Hilfe eines Grafiktaschenrechners gelöst werden.

- methodisch-didaktische Vorüberlegungen:

Ist es sinnvoll die Wurzelgleichungen ausschließlich mit dem Grafiktaschenrechner lösen zu lassen. Oder sollte man ~~der~~ dies als Kontrolle verwenden für die Lösungen, die man auf algebraischen Weg erhalten hat? Oder dient diese Stunde als Einstieg in das Thema um ein geometrisches Verständnis zu vermitteln?

Weitere Frage ist: Was sollten die Schüler ~~sie~~ für Vorkennt- ~~nnt~~nisse haben?

Sie sollten den Grafiktaschenrechner bedienen können.

Sie sollten lineare und quadratische Funktionen bereits kennen.

Grobziel:

Wurzelgleichungen in den Taschenrechner eingeben können und die Lösungen ablesen können.

Feinziele:

- Ein geometrisches Verständnis von Gleichungen allgemein erhalten
- Eigenschaften der ~~[illegible]~~ Wurzelfunktion kennen lernen

Sachanalyse (siehe 1)

Unterrichtsverlauf:

- Motivation:

Ich zeige den Schülern anhand des Tageslichtprojektors ~~das~~ den Graphen der Gleichung: $f(x) = \sqrt{x}$. Die Schüler sollen in Kleingruppen überlegen, wie die Funktionsgleichung dazu aussehen könnte.

Anschließend werde ich die Vorschläge der einzelnen Gruppen vorerst unkommentiert sammeln und die Begründungen anschließend mit der Klasse diskutieren.

Zu Sicherung werden die Eigenschaften der Wurzelfunktion in Heft übertragen.
Anhand der Gleichung $f(x) = \sqrt{x-3}$
sollen die Schüler begründen, wo diese ~~Glei~~ Funktion die Nullstellen hat und für welche Werte von x sie definiert ist.
Dies wird anschließend als Gleichung dargestellt $\sqrt{x-3} = 0$ und als Schnittpunkt mit den beiden Funktionen $f(x) = \sqrt{x-3}$ und $g(x) = 0$ interpretiert, um das geometrische Verständnis zu fördern und hin zu schwierigeren Wurzelgleichungen hinzuführen.

Zur Vertiefung erhalten die Schüler verschiedene Wurzelgleichungen, die sie anhand des grafikfähigen Taschenrechners lösen sollen.
Dabei sollen die Schüler besonders darauf achten wieviele Lösungen es gibt.
Zusätzlich sollen sie diskutieren, warum die Gleichung $f(x) = \sqrt{x}$ im Gegensatz zu $h(x) = x^2$ nur einen „Ast" hat.