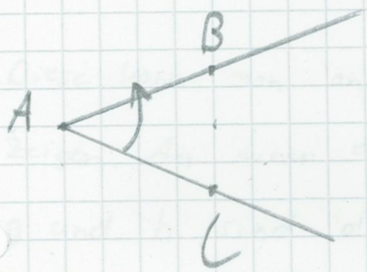
Aufgabe

1

1a) Ein Winkel ist in Worten eine von zwei Schenkeln [AB und [AC eingeschlossenes Feld, das beim überstreichen vom dem einem Schenkel auf den anderen übergangen wird.

Dabei gilt A als der Scheitelpunkt des Winkelfeldes und [AB bzw [AC bezeichnen die Schenkel: anschaulich



mit Definition: Ein Winkel ist ein von 2 Halbgeraden [AB und [AC eingeschlossene Fläche mit gleichem Anfangspunkt A.

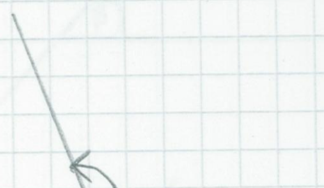
Ein Winkel wird dabei folgendermaßen bezeichnet:

$\alpha = \sphericalangle [AB[AC$; dabei kennzeichnet man den Winkel im Winkelfeld mit einem Pfeil entgegengesetzt des Uhrzeigersinns, um ihn festzulegen. Mit dem Gradmaß eines Winkels wird den 360° Teil eines Ganzen festgelegt. Das heißt 1° ist der 360° Teil eines Ganzen.

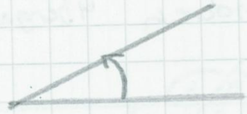
Zum Winkelbegriff gehören auch die verschiedenen Winkelarten:

stumpfer Winkel, spitzer Winkel, überstumpfer Winkel, Vollwinkel, Nullwinkel, gestreckter Winkel und rechter Winkel:

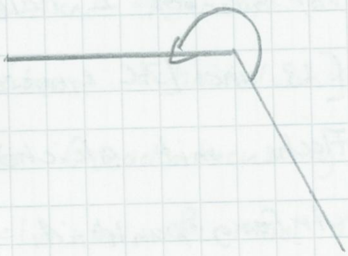
Ein stumpfer Winkel ist größer als 90° bzw. bewegt sich im Intervall ~~vom~~ von 90° - 180°:



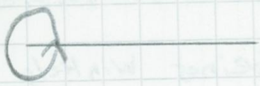
Ein spitzer Winkel halt sich im Intervall von 0° bis 90° auf:



Ein überstumpfer Winkel ist größer als 180° und bewegt sich im Intervall bis 360°

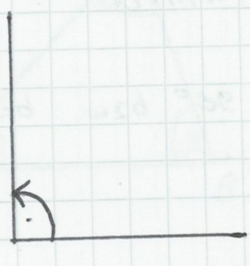


Der Vollwinkel beträgt 360°:

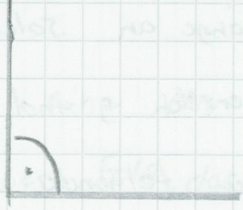


Der Nullwinkel beträgt 0°:

Und für den rechten Winkel gilt, dass er 90° besitzt; einen rechten winkel kennzeichnet man mit einem Punkt im überstrichnen Winkelfeld

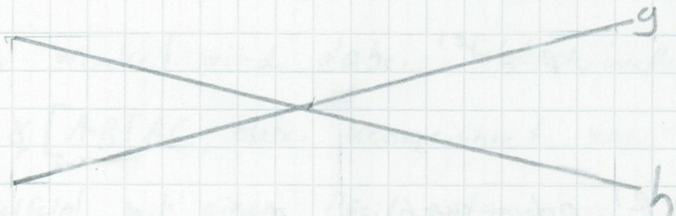


und zwar folgendermaßen

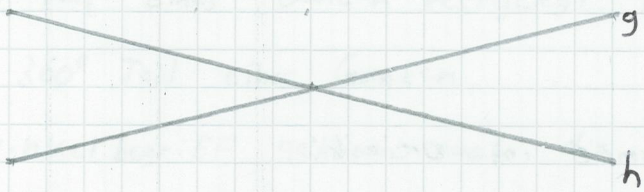


Ferner existieren in der ebenen Geometrie noch Nebenwinkel, Scheitelwinkel, Wechselwinkel, oder auch Z-Winkel genannt, sowie Stufenwinkel bzw F.-Winkel.

b.) Diese kann man an sogenannten Geradenkreuzungen aufzeigen. An einer einfachen Geradenkreuzung mit Geraden g und h sind dies folgende:

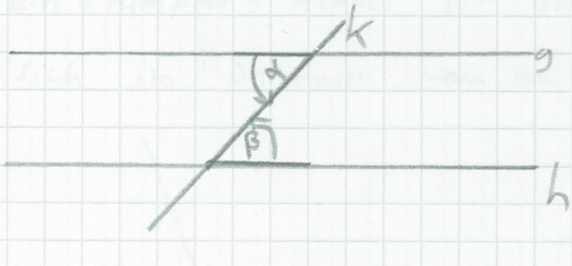


Nebenwinkel



Scheitelwinkel

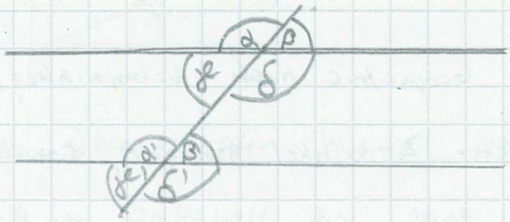
Befinden wir uns an einer Doppelachsengeradenkreuzung mit parallelen Geraden g, h und eines Schnittgerade k treten folgende Winkel auf:



wechselwinkel
bzw.
z-Winkel

Stufenwinkel
bzw.
F-winkel

Für die Zusammenhänge an solchen Geradenkreuzungen zweier paralleler Geraden g und h und einer weiteren Schnittgerade k gelten folgende:



Nebenwinkel ergänzen sich zu 180° wechselwinkel sind gleich groß, ebenso Scheitelwinkel und Stufenwinkel. Dies ist Ersichtlich an der Geradenkreuzung; Nebenwinkel: $\alpha + \beta = 180°$

Scheitelwinkel β und γ: $\gamma = \beta$

bzw. $\beta' = \gamma'$

Z-Winkel: $\gamma = \beta'$

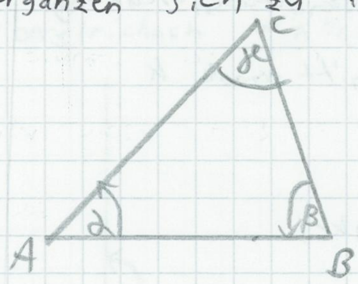
Stufenwinkel: z.B. $\beta = \beta'$ oder auch

$\alpha = \alpha'$

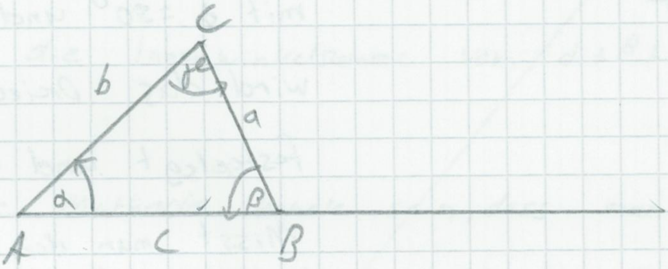
Aufgabe 2

Satz: Innenwinkelsumme im Dreieck:

Die Innenwinkel eines Dreiecks Δ ABC ergänzen sich zu 180°: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$



Der Satz über die Innenwinkelsumme im Dreieck beschreibt hierbei eine mögliche Anwendung des in Teil 1b) dargestellten Systems an einer Geradenkreuzung: (Bsp. für eine unterrichtliche Aktivität). D.h. würde man ein Dreieck ABC an einer Geradenkreuzung mit einbeziehen bzw. verlängert man die Grundseite c des Dreiecks über ihre Länge hinaus kam folgendermaßen argumentiert werden:



Die Nebenwinkel $\beta + \delta = 180°$ $(\Rightarrow \beta = 180° - \delta$.

Wenn also die Innenwinkelsumme im Dreieck auch 180° ist muss gelten $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, also auch $\alpha + \gamma = \delta$

Wie kann man das also realisieren?

Man zeigt den Schülern, wenn man vom vorhandenen Dreieck die beiden anderen Ecken abreißt und diese am Punkt beim Winkel β über die verlangerte Gerade hinaus anlegt tritt genau dieser Fall ein. D.h. über verschiedene Winkelrelationen hat man gezeigt, dass $\alpha + \gamma$ tatsächlich δ ergibt.

Eine weitere Möglichkeit für eine unterrichtliche Aktivität geht z.B. über folgende Aufgabenstellung:

Zeichne ein Dreieck ABC mit der Innenwinkelsumme von 200°. Und begründe dein Ergebnis. (z.B. $\alpha = 80°$, $\beta = 50°$, $\gamma = 70°$).

Durch einfaches Zeichnen verschiedener Dreiecke und anschließendes Abmessen zur Kontrolle, werden die Schüler

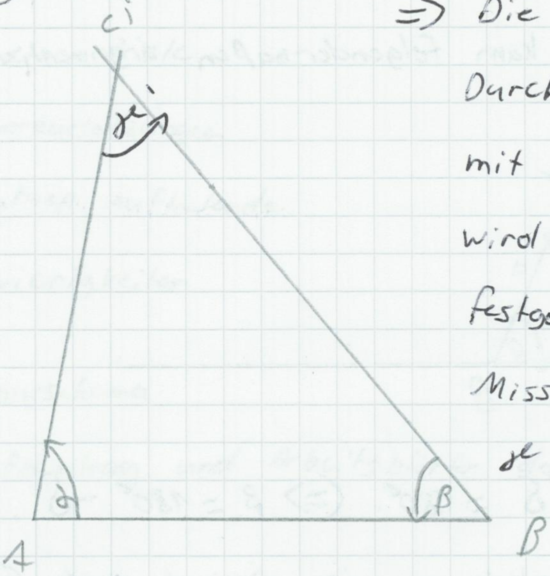
6

schnell herausfinden, dass dies nicht möglich ist.

Als Kontrollwert erhalten die Schüler immer die Winkelsumme von 180°.

Am Beispiel: $\cancel{\alpha+\beta+\gamma} \overset{!}{=} \alpha+\beta+\gamma = 200^\circ$ mit

$\left.\begin{array}{l}\alpha = 80^\circ \\ \beta = 50^\circ\end{array}\right\} \gamma = 70^\circ$



=> Die Schüler sehen: Durch die Winkel α und β mit $\alpha = 80^\circ$ und $\beta = 50^\circ$ wird das Dreieck bereits festgelegt und ebenso γ. Misst man den Wert von γ stellt man fest, dass dieser $50 = \gamma$ aufweist.

Also kann der vorgegebene Wert von $\gamma = 70^\circ$ nicht stimmen.

=> Kontrolle: $\alpha + \beta + \gamma' = 180^\circ$

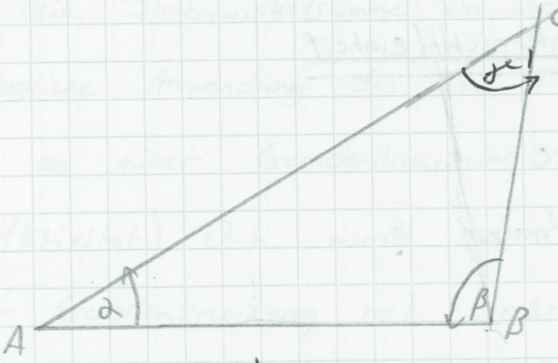
Um zu zeigen, dass dies keinen Einzelfall darstellt, sollen die Schüler dieses Problem noch anhand eines weiteren Beispiels testen.

Wähle z.B. $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 100^\circ$

und $\gamma = 70^\circ$ um

die Summe $\alpha + \beta + \gamma = 200^\circ$

zu erhalten:



wieder erhalten wir für γ' einen anderen Wert als angegeben, nämlich $\gamma' = 50^\circ$

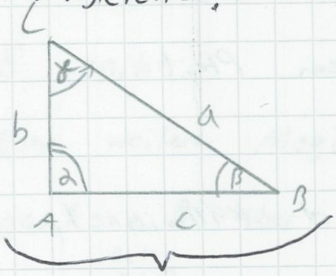
$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma' = 180^\circ$

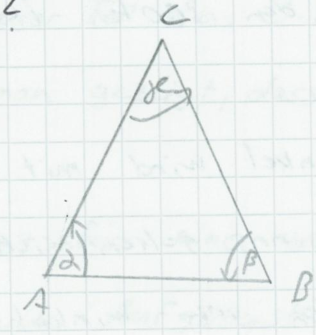
Somit ist die Innenwinkelsumme vom $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ begründet.

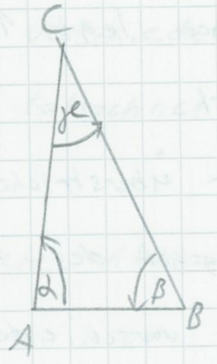
Eine dritte Methode könnte sein, dass man z. B. ein rechtwinkliges, ein gleischenkliges und ein allgemeines Dreieck zeichnen lässt (enaktiv und dynamisch) und schließlich die Winkel nachmisst.

Aufgabenstellung:

Zeichne ein rechtwinkliges, ein gleichschenkliges und ein beliebiges Dreieck.
Miss die Winkel. Was kannst du über ihre Summe $\alpha + \beta + \gamma$ aussagen?
Vergleiche!







$\alpha = 90^\circ$

$\beta = 39^\circ$

$\gamma = 50$

$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

$\alpha = 64^\circ$

$\beta = 64^\circ$

$\gamma = 52^\circ$

$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

$\alpha = 83^\circ$

$\beta = 65^\circ$

$\gamma = 32^\circ$

$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

8

Aufgabe 3

Grobüberblick: Unterrichtseinheit

1. Fachliche Analyse

2. Didaktische Analyse

2.1. Grobziel

2.2. Feinziele

2.3. allgemeine Ziele

2.4. Lernvoraussetzungen

2.5. eventuell auftretende Schwierigkeiten

3. Artikulationsschema (ggfs Hefteintrag und Arbeitsblätter dazu)

Ausarbeitung

1. Fachliche Analyse

Wie bereits in Teilaufgabe 1a) und 1b) erläutert ist ein Winkel eine von 2 Halbgeraden [AB und [AC eingeschlossene Fläche mit gleichem Anfangspunkt A.
Ferner legt 1° dabei den 360ten Teil eines Ganzen fest.

Der überstrichende Winkel wird mit einem Pfeil entgegen des Urzeigersinns gekennzeichnet.
Die verschiedenen Arten von Winkel sind Nullwinkel, spitzer Winkel, rechter Winkel, stumpfer Winkel, rechter Winkel, überstumpfer Winkel und Vollwinkel.

Ferner sind Nebenwinkel, Scheitelwinkel, Wechselwinkel und Stufenwinkel bekannt, welche an einer Geradenkreuzung zweier paralleler Geraden g und h, sowie einer Schnittgerade k festgestellt werden können (siehe 1 b).
Der Satz über Innenwinkelsummen und Darstellungsmöglichkeiten sind ebenso bekannt.

2. Didaktische Analyse ①

2. 1. Grobziel

Die Schüler sollen die Innenwinkelsumme in beliebigen n-Ecken kennen.

2.2. Feinziele

- Die Schüler sollen verstehen, dass die Innenwinkelsumme eines beliebigen n-Ecks der Vorschrift $(n-2) \cdot 180°$ gehorcht und dies erklären bzw. anwenden können.

- Die Schüler sollen wissen, dass jedes n-Eck dabei in kongruente Teildreiecke zerlegt werden kann und muss

2.3. Allgemeine Ziele

- mathematisches Argumentieren soll gezielt gefördert und gefördert werden

2.4. Lernvoraussetzungen

- Der Begriff des Winkels ist bekannt (Definiton, Arten von winkeln)
- Schüler können Winkel zeichnen, benennen und haben Fertigkeiten im umgang mit dem Geodreieck
- Die Innenwinkelsumme in einem Dreieck ABC ist bekannt
- Kongruenz und Ähnlichkeit

2.5. eventuell auftretende Schwierigkeiten

- Schüler sehen nicht, dass Vierecke im Dreieck zerlegt werden können
- ngenauigkeiten beim messen und zeichnen von Winkel treten auf
- schüler können nichts mit der Formel $(n-2) \cdot 180°$ anfangen, sie wissen beispielsweise nicht was n bedeutet

(*) In der Realschule ist das Thema Winkel in der 6. Klasse thematisiert. Aufbauend darauf kommt dann das Thema Vierecke und Innenwinkelsumme der beliebigen Vierecke erst in einer höheren Klassenstufe zum Einsatz.

3. Artikulationsschema

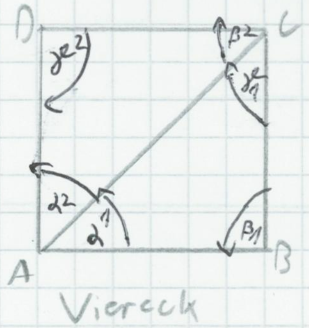
Zeit ∑	Unterrichtsphase	Unterrichtsmethode	Sozialform	Medien
3	Begrüßund /wiederholung der letzten Stunde	Lehrer-schüler-Gespräch	→	✓
10	Einstieg /Motivation	Auf dem OHP legt der Lehrer eine Skizze eines Vierecks ABCD auf und fragt nach der winkelsumme in diesem Viereck. Die Schüler kommen darauf, dass das nichtso einfach lösbar ist und finden schließlich aber heraus, das Viereck in zwei Teildreiecke ABC und ACD zu zerlegen, da die Summe der Innenwinkel in Dreiecken ja bereits bekannt ist. Also muss die summe des Vierecks $2 \cdot 180° = 360°$ ergeben	Klassenverband, darbietend - aufgebend	OHP Folie

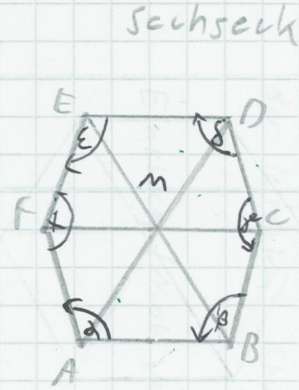
②

Zeit	U-Phase	U-Methode	Sozialform	Medien
15	Erarbeitung der Winkelsumme eines Vierecks bzw. eines beliebigen n-Ecks anhand verschiedener Beispiele	Es stellt sich die Frage, wie sieht es z.B. mit einem Sechseck aus? Die Schüler wenden die eben erprobte Methode durch am Sechseck an und stellen fest, auch dieses ist in Teildreiecke zerlegbar. Diesmal in sechs Teildreiecke. Problemdarstellung! Problemfrage Die Innenwinkelsumme im beliebigen n-Eck? Aufgrund der Innenwinkelsumme im Dreieck von 180° lässt sich eine Gesetzmäßigkeit die, die Schüler herausfinden sollen erkennen	Klassenverband aufgebend – ausführend	OHP

13

Erklärung (zum Einstieg)





Viereck ABCD wird in zwei Teildreiecke zerlegt:

Δ ABC und

Δ ACD

$\Downarrow$

$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1^2 = 180°$

$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2^2 = 180°$

Also ist die Summe

im Viereck
$180° + 180° = 360°$

Sie muss einer bestimmten Gesetzmäßigkeit gehorchen:

nämlich

$(n-2) \cdot 180°$

Probe $(4-2) \cdot 180°$

$= 360°$

Sechseck ABCDEF

wird in sechs kongruente

Teildreiecke zerlegt.

Δ ABM
Δ BCM
Δ CDM
Δ DEM
Δ EFM
Δ FAM

analoge Begründung wie beim

Viereck. Mit Hilfe der

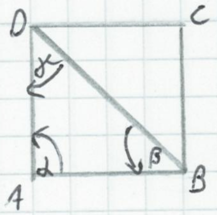
gewonnenen Gesetzmäßigkeit

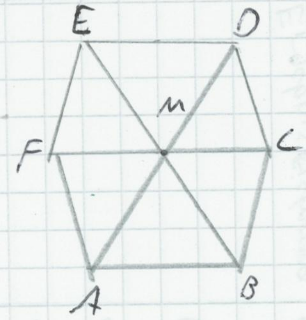
ergibt sich für $n=6$:

$(6-2) \cdot 180°$

$= 4 \cdot 180° = 220°$

Die Innenwinkelsumme in beliebigen n-Ecken





Viereck ABCD wird in 2 kongruente Teildreiecke zerlegt.

Für die Innenwinkelsumme gilt: (*)

Viereck ABCDEF wird in sechs kongruente Teildreiecke zerlegt.

Merke: Die Innenwinkelsumme im n-Eck gehorcht der Gesetzmäßigkeit $(n-2) \cdot 180^\circ$

leider Zeit vorbei....

(*) $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma^2 = 180^\circ$

$\rightarrow 2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$

	~~α~~ $\alpha + \beta + \gamma =$ [illegible]$0°$ mit Ecken des Dreiecks $n = 3$ folgt $(n-2) \cdot 180°$ $= (3-2) \cdot 180°$ $= 180°$ ~~Auch~~ Analog lässt sich das auch beim Viereck so zeigen: $n = 4$: $(4-2) \cdot 180° = 360°$ Für das Sechseck und alle weiteren n-Ecke gilt das analog: $(6-2) \cdot 180° = 720°$		
Ergebnissicherung	Die gewonnen Ergebnisse werden an der Tafel in einem Hefteintrag festgehalten	Lehreranweisung	Hefteintrag
Ausstieg / Verabschiedung	Als Hausaufgabe sollen die Schüler ein Achteck zeichnen und die erwobenen Kenntnisse anwenden.	Lehrer - Schüler Gespräch	Klassenbuch