Gliederung

1. Sachliche Analyse

a) Begriffsdefinition „Winkel" in der ebenen Geometrie

b) Definition Parallelenpaar, versch. Arten auftretender Winkel, Zusammenhänge

2. Didaktische Analyse

2.1. Innenwinkelsumme im Dreieck

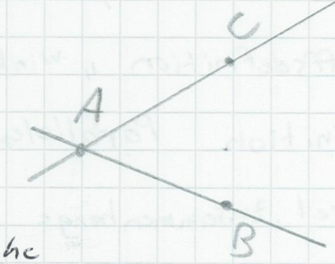
a) Einbettung in den Lehrplan

b) Lernvoraussetzungen

2.2 Innenwinkelsumme in beliebigen n-Ecken

1. Sachliche Analyse

a) Begriffsdefinition Winkel im $\mathbb{R}^2$



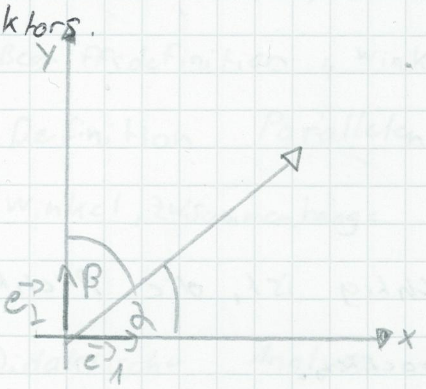
Unter einem Winkel $\sphericalangle BAC$ versteht man die Fläche zwischen den Halbgeraden $[AC$ und $[AB$ welche sich im Punkt A schneiden. Mit A bezeichnet man somit den Scheitel des Winkels, $[AB$ und $[AC$ nennt man die geordneten Schenkel.

In der ebenen Geometrie, also im $\mathbb{R}^2$, kann man zwischen zwei verschieden Winkeln unterscheiden: dem Winkel zwischen zwei Geraden und dem Winkel zwischen zwei Vektoren. Im $\mathbb{R}^3$ kommt zusätzlich eine Betrachtung des Winkels zwischen zwei Ebenen in Betracht. Für den Winkel zwischen zwei Geraden verwendet man die Formel $\cos\varphi = \left|\frac{\vec{n} \circ \vec{n'}}{n\, n'}\right|$, wobei $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{n'} = \begin{pmatrix} n_1' \\ n_2' \end{pmatrix}$ die Normalenvektoren der jeweiligen Geraden bezeichnetnen. Ebenso kann über die Steigungen m und m' der beiden Geraden der gesuchte Schnittwinkel berechnet werden.

$$\tan\varphi = \left|\frac{m' - m}{1 + mm'}\right|$$

Der Winkel zwischen zwei ~~Ver~~ Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, wobei gelten muss $0 \leq \varphi \leq \pi$, kann durch folgende Formel errechnet werden: $\cos\varphi = \vec{a}^{\,0} \circ \vec{b}^{\,0} = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{a\, b} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{a \cdot b}$

Der Kosinus des Winkels zwischen einem ~~Ve~~ Vektor und einer Koordinatenachse heißt Richtungskosinus des Vektors.



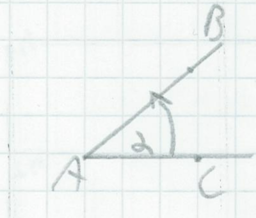
$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{e}_1}{a} = \frac{a_1}{a} \; ; \; \cos\beta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{e}_2}{a} = \frac{a_2}{a}$$

Somit erhält man: $\vec{a}^0 = \begin{pmatrix}\cos\alpha \\ \cos\beta\end{pmatrix}$ mit

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$, eine sehr wichtige Gleichung welche auch in der Analysis häufig Anwendung findet.

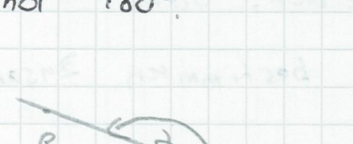
Es gibt drei verschiedene Winkelarten: den spitzen ~~Winke~~ Winkel, den stumpfen Winkel und den überstumpfen Winkel. Unter einem spitzen Winkel ~~v~~ versteht man jene Winkel, welche zwischen 0° und 90° liegen.

90° liegen



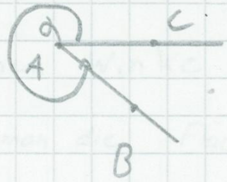
Spitzer Winkel

Der Winkel eines stumpfen Winkels bewegt sich zwischen 90° und 180°.



Stumpfer Winkel

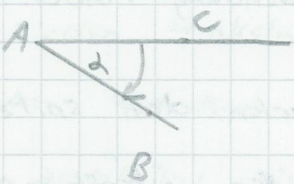
Bei einem überstumpfen Winkel beträgt die Grad Zahl einen Wert zwischen 180° und 360°



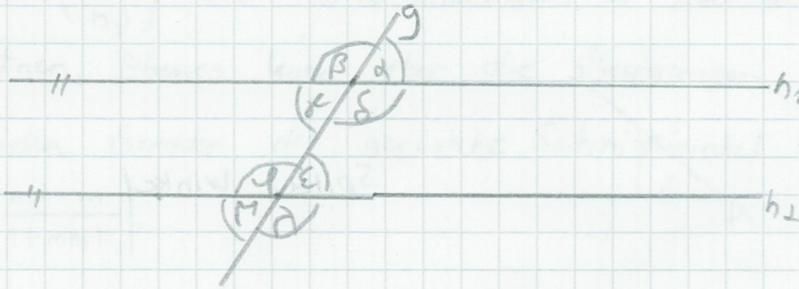
Somit wird deutlich, dass es wichtig ist, die Richtung des aufgeschlagenen Winkels zu betrachten.

Es gibt auch liegende Winkel, welche im Uhrzeigersinn aufgeschlagen werden und nicht wie positive Winkel gegen denn Uhrzeigersinn.

z.B. Winkel mit $\alpha = -30°$



1b) <u>Zusammenhang der Winkel, welche bei einem Schnitt einer Geraden mit einem Parallelenpaar auftreten</u>



h_1 und h_2 bezeichnen zwei parallele Geraden im $\mathbb{R}^2$, wobei g das Paar beliebig schneidet. Somit entstehen acht Winkel, welche in einem bestimmten Zusammenhang stehen.

Je zwei Winkel, welche direkt nebeneinander liegen, ergänzen sich zu 180°; z.B. $\alpha + \beta = 180°$; $\alpha + \delta = 180°$; $\gamma + \delta = 180°$, $\varphi + \varepsilon = 180°$, $\mu + \lambda = 180°$ (Nebenwinkel)

Desweitere gibt es immer gegenüberliegende Winkel auf den Geradenkreuzungen, welche immer gleich groß sind: $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$, $\varphi = \lambda$, $\mu = \varepsilon$

Auch sind Stufenwinkel gleich groß.

$\alpha = \varepsilon$, $\gamma = \mu$, $\beta = \varphi$, $\delta = \lambda$

woraus folgt $\alpha = \gamma = \varepsilon = \mu$ und $\beta = \delta = \varphi = \lambda$

Wechselwinkel ergänzen sich zu $180°$, genau wie gegenüberliegende Winkel, d.h.

z.B. $\alpha + \varphi = 180°$, $\beta + \varepsilon = 180°$,

$\gamma + \lambda = 180°$, $\delta + \mu = 180°$

2. Didaktische Analyse

Im Lehrplan der 7. Klasse der bayerischen Realschulen ist die Bearbeitung der Innenwinkelsumme im Dreieck und n-Eck eingebettet.

Hier ist sowohl nach einem gekonnten Umgang mit geometrischen Formen, Ortslinien wie auch einer immer intensiver auftretenden Arbeit mit Winkeln im zweidimensionalen Raum gefragt.

Schüler müssen bereits Kenntnisse über die Eigenschaften von Dreiecken besitzen ~~sowas~~ sowie bereits grundlegende Kenntnisse über Winkeleigenschaften beherrschen. In dieser Jahrgangsstufe wird nun die Arbeit mit Winkel vertieft. Auch sollten die Schüler mit den ~~griechischen~~ griechischen Buchstaben (α, β, γ, ...) immer vertrauter werden, welche hier immer Winkelgrößen bezeichnen.

Im Realschulunterricht wird versucht, den Schülern durch „deduktive Theorie den Stoff so anschaulich wie möglich darzubieten. Man soll von Speziafalle ausgehend sich hin zur allgemeinen Theorie und Gesetzmäßigkeiten arbeiten. Somit wird den Schülern erst das Modell der Winkel (wie in 1b)) beschrieben dargestellt, hinzur Innenwinkelsumme im Dreieck, welche auf dessen Winkelzusammenhänge beruht, hier zur Verallgemeinerung, der Innenwinkelsumme w belieibigen n-Ecken.

Desweiteren soll den Schülern durch eine abwechslungsreiche Unterrichtsdarbietung die Erlernung der mathematischen Kompetenzen ermöglicht werden, welche von der Kultusministerkonferenz im Jahr 2004 beschlossen wurden. Diese sechs Kompetenzen bilden sich aus mathematischen argumentieren (K1), mathematische Probleme lösen (K2), modelieren (K3).

Auch ist der Umgang mit den Ideen (Zahlen, Messen, funktionaler Umgang, Größen und Form, statistische Arbeit) von großer Bedeutung ~~hier~~ in den Mathematikunterricht – er ist darauf gestützt.

Grobziele und Feinziele müssen vorab von der Lehrkraft für die jewilige Unterrichtsstufe abgesteckt werden um die bestmöglichen Lernziele erreichen und auch beobachten zukönnen.

Für unterrichtliche Aktivitäten, die zur Begründung des Satzes über die Innenwinkelsumme im Dreieck führen, kann als Grobziel die Erarbeitung eben dieses Satzes festgesetzt werden. Ebenso gilt dies für die Erarbeitung des Satzes über die Innenwinkelsumme im beliebigen

4-Ecken. Das Grobziel hierbei ist die schrittweise Heranführung zu dem Satz.

Feinziele sind der aktive Umgang mit Winkeln eigenschaften sowie die Fähigkeit, mit Winkeln arbeiten zu können, auch ist es wichtig, den Umgang mit dem Lineal zu vertiefen. Exaktes zeichnen der Skizze ist ebenfalls sehr wichtig ~~da~~ um Ungenauigkeiten beim eventuellen Ablesen ~~zu~~ der Winkelgrößen, zu vermeiden. Dies ist eines der möglichen Schülerfehler bzw. Probleme. Auch könnten Schüler Schwierigkeiten dabei haben, die richtigen Richtung des Winkels zu erkennen und somit positive und negative Winkel vertauschen. ~~(wobei einer~~

Allgemein ~~is~~ ist es wichtig, dass die Lehrkraft selber über ein ein curriculares Wissen, potenzielle Schülerfehler, aktuelle Studien sowie im Umgang mit Schülern und deren Schwächen gut geschult ist. Eine schwache Lehrkraft liefert keinen guten Unterricht, womit den Schülern der stoffliche zugang immens erschwert wird. Auch ist es wichtig Schülerfehler nich aprupt zu korigieren und weiterzumachen sondern durch gemeinsame wiederholungen mit den Schülern das richtige Ergebnis zu erarbeiten. In der Realschule kann nich einer Begriffsdefinition herangegangen werden, wie in 1a) ausführlich beschrieben.

Schüler definieren einen Winkel über die Fläche zwischen dem zwei sich schneidenden Geraden. Jedoch auch mit den Bezeichungen des Punktes A als Scheitel, den Halbgeraden [AB und [AC als

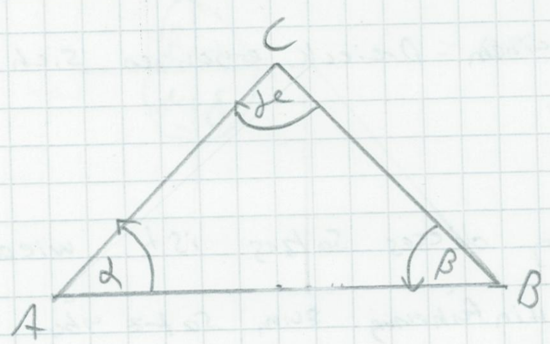
Scheitel, wobei gesichert sein muss, dass Schüler bereits Kenntnisse über die Ortslinie „Halbgeraden" haben.

Schüler ~~musse~~ müssen bereits vorangigen ~~Studien~~ das ~~k~~ Stunden das konstruieren eines Winkels mittels Geodreieck. sowie die Zusammenhänge der Winkel bei der Parallelen-kreuzung erlernt haben.

3. Unterrichtsentwurf.

a) unterrichtliche Aktivitäten zur Begründung des Satzes der Innenwinkelsumme im Dreieck

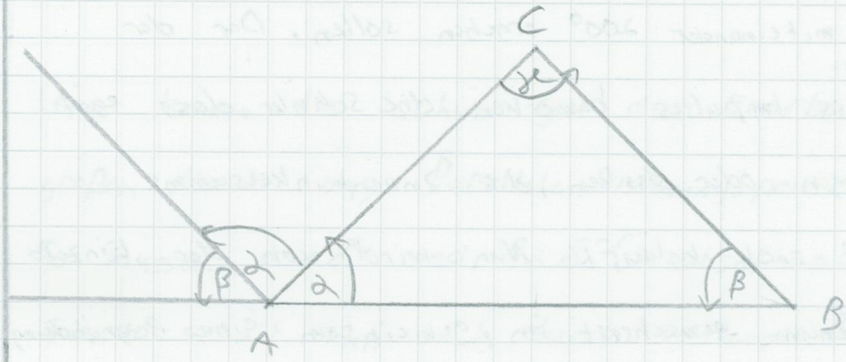
Zum Einstieg (zur Motivation) stellt der Lehrer den Schülern die Aufgabe, ein Dreieck zu konstruieren wobei die Innenwinkel miteinander 200° ergeben sollen. Der der Bearbeitung dieses Impulses bemerken die Schüler, dass egal wie sie anfangen oder denken, die Innenwinkelsumme immer auf 180° sich beläuft. Nun wird von der Einzelarbeit zum Plenum gewechselt im gemeinsam eine Begründung für dieses Phänomen zu ergründen. Die Schüler sollen ein beliebiges Dreieck in ihr Heft zeichnen. Der Lehrer macht die selben Schritte an den Tafel. Im Idealfall nimmt er ein gleichseitiges Dreieck um das Ablesen der Winkelgrößen zu erleichtern.



hier ein rechtwinkliges Dreieck.

Nun verweist der Lehrer auf die verschiedenen Winkelarten (wie in 1) beschrieben), ob man nun damit eine Lösung herbeiführen kann.

Die Schüler werden an die Aufgabe herangeführt, die Innenwinkel des Dreiecks auseinander zureihen



Die Schüler konstruieren dies mit Hilfe des Geodreiecks. So erkennen sie, dass sich ihre Winkel, egal wie sie ihr Dreieck gezeichnet haben, zu $180°$ ergänzen. Wenn man also auf die Zusammenhänge bei der Parallelenkreuzung zurück geht. Da hieß es „Nebenwinkel ergänzen sich zu $180°$".
Somit kann von jedem speziellen Dreieck eine allgemeine Formel gebildet werden, welche der Lehrer an der Tafel und die Schüler im Heft festhalten.

Innenwinkelsatz im Dreieck:

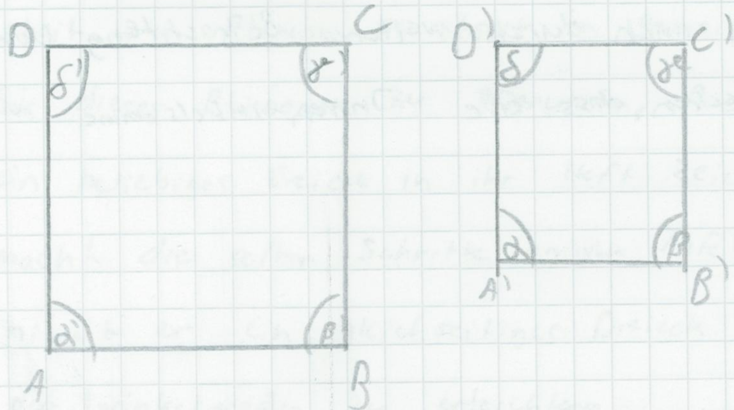
Innenwinkel in einem Dreieck ergänzen sich immer zu $180°$

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

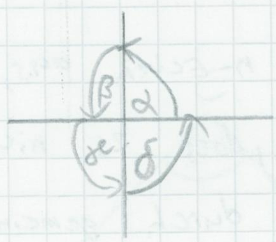
Die Erarbeitung dieses Satzes ist wiederum eine ~~Sc~~ schrittweise Hinführung zum Satz über die Innenwinkelsumme in beliebigen n-Ecken.

Die Unterrichtsstunde wird eingeleitet mit einer besonderen Einheit zur Erarbeitung der Innenwinkelsumme im Dreieck.

Weiter geht die Erarbeitung ~~einer~~ zur Innenwinkelsumme in bestimmten Dreiecken um so auf einen verallgemeinerten Satz über die Innenwinkelsumme von n-Ecken zu gelangen.
Schüler sollen Quadrat betrachten und Rechtecke.

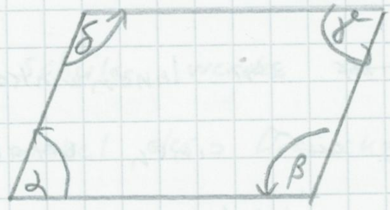


Hier wird deutlich, dass die Innenwinkelsumme je mit je ~~w~~ vier rechten Winkeln sich zu je 360° ergänzt
Setzt man die Winkel aneinander erhält man eine Kreisdarstellung ~~als~~ als Beweis.



$$360^\circ = \alpha + \beta + \gamma + \delta$$
$$= 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ$$

~~Die Unterrichtsstunde wird~~ weiter geht man ~~um~~ nun zu weiteren regelmäßigen Vierecken, wie den Parallelogramm

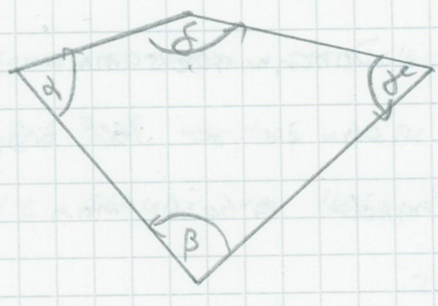


$\alpha = \gamma = 69°$

$\beta = \delta = 111°$

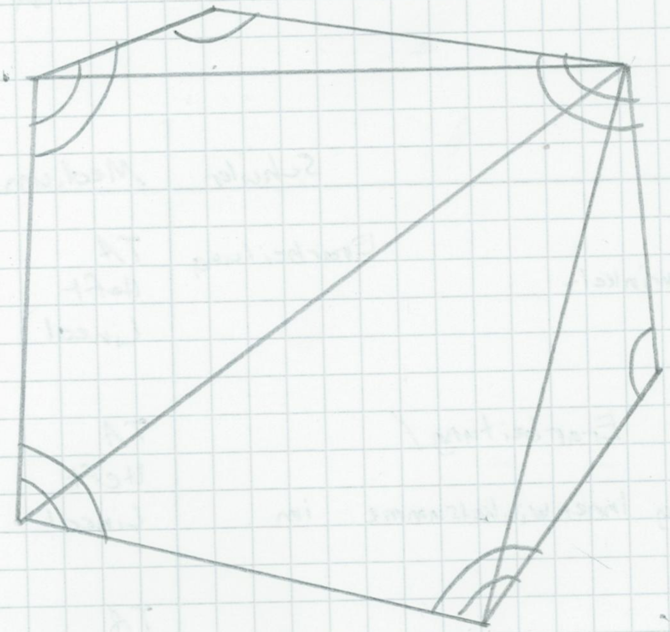
$\rightarrow \alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$

Hier können die schüler gut die Erarbeitung der winkel-größen durch das Parallelenkreuzungsprinzip durchführen. So müssen $\alpha = \gamma$ und $\beta = \delta$ (Wechselwinkel) gelten Somit erhält man auch durch weitere Betrachtung von unregelmäßigen Vierecken, dass die Innenwinkelsumme immer 360° ergibt.



$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$

Wie ~~steht~~ sieht es nun mit n-Ecken aus, z.B einem Fünfeck. Hier merkt man, dass es nicht mehr so einfach geht, und so wird durch gemeinsame Erarbeitung festgestellt, dass man ja jedes beliebige n-Eck in Dreiecke zerlegen kann, von denen man den Satz bereits weiß.



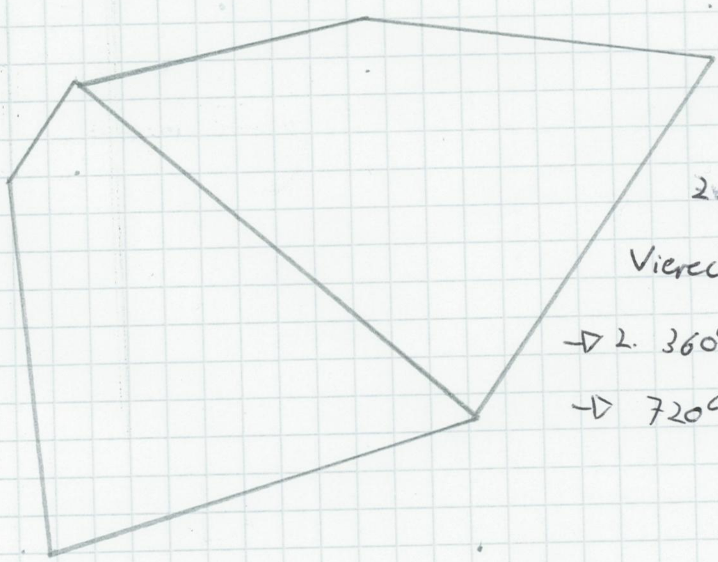
4 Dreiecke

→ 4 · 180°

= 720°

Hier erhält man vier Dreiecke von denen man die winkel abmessen kann. Durch Ergänzung mit dem Nebenwinkelsatz.

Somit kann am Schluss der Stunde festgehalten werden



Zwei

Vierecke

→ 2 · 360°

→ 720°

Hausaufgabe soll sein, dass & Schüler Gesetzmäßigkeiten in einem Satz veranschaulichen.

Was in der nächsten Stunde vom Lehrer besprochen wird

Es werden die Kompetenzen mathematisch argumentieren, Problemlösen sowie die Vielzahl Messen und Zahlen gefördert.

Zeit	Lehrer	Schüler	Medium
Einstieg	Impuls 200° Innenwinkel- summe	Erarbeitung	TA Heft Lineal
TZ 1			
	gemeinsame Erarbeitung / Wiederholung Innenwinkelsumme im Dreieck		TA Heft Lineal
TZ 2	Satz Innenwinkelsumme im Viereck		TA Heft Lineal
			Heft
Haus- aufgabe	Satz		