

Thema 2

1.

Definition „geometrischer Ort“:

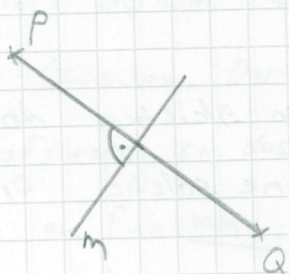
Unter einem geometrischen Ort versteht man eine Punktmenge mit einer Eigenschaft E . Alle Punkte dieser Menge besitzen also eine gleiche Eigenschaft.

Beispiele für Ortslinien im \mathbb{R}^2 :

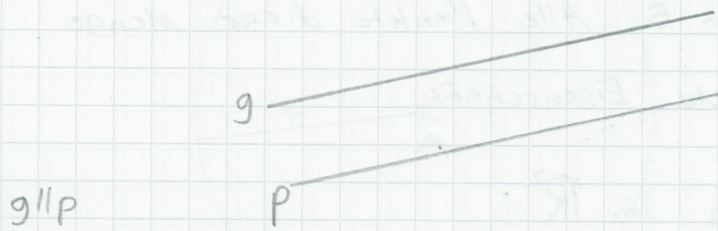
- Ein Kreis k um einen Punkt M ist eine Ortslinie, denn alle Punkte der Kreislinie teilen eine Eigenschaft, nämlich den gleichen Abstand vom Punkt M (Def. Kreis: $k = \{x \mid \overline{xM} = r\}$).

Ein Kreis ist demnach eine Ortslinie zu einem Punkt und es gibt unendlich viele derartige Ortslinien zu einem Punkt M . (Skizze siehe S. 4)

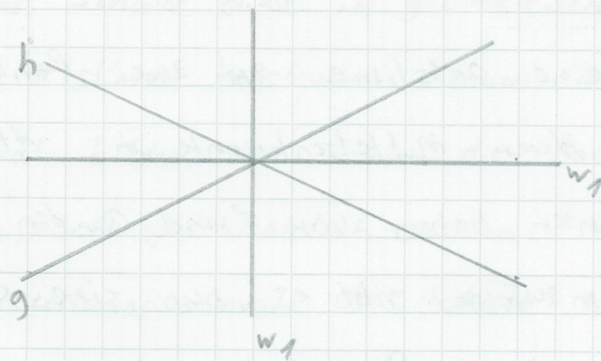
- Es gibt auch eine Ortslinie zu zwei Punkten P und Q , nämlich deren Mittelsenkrechte m . Alle Punkte der Mittelsenkrechten haben von P und Q den gleichen Abstand. Demzufolge gibt es nur eine Ortslinie zu zwei Punkten.



Die Ortslinie zu einer Geraden g ist eine parallele Gerade p zu g , denn alle Punkte der Geraden p haben den gleichen Abstand von g . Auch hier gibt es wieder unendlich viele Ortslinien, denn es gibt unendlich viele Parallelen zu g .



Die Ortslinien zu zwei sich schneidenden Geraden g und h sind deren Winkelhalbierende w_1 und w_2 . Alle Punkte der Winkelhalbierenden haben den gleichen Abstand von g und h . Hier gibt es nur diese beiden Ortslinien zu zwei sich schneidenden Geraden. w_1 und w_2 stehen dabei aufeinander senkrecht.



Die Ortslinie zu zwei parallelen Geraden g und h ist deren Mittelparallele p .

Alle Punkte von p haben den gleichen Abstand zu g und h . Es gibt nur eine solche Ortslinie zu

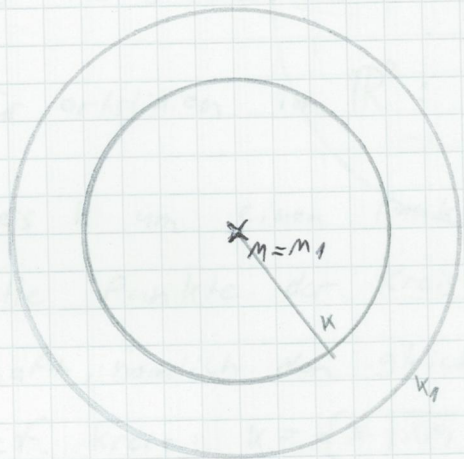
zwei parallelen Geraden.



$g \parallel h \parallel p$

- Es gibt weiterhin unendlich viele Ortslinien zu einem Kreis k , nämlich konzentrische Kreise k_1, \dots, k_n mit dem gleichen Mittelpunkt M ($M = M_1 = \dots = M_n$).

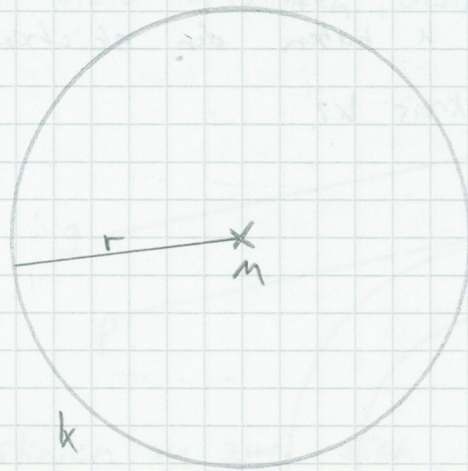
Alle Punkte eines Kreises k haben den gleichen Abstand zu einem konzentrischen Kreis k_1 .



Auch im \mathbb{R}^3 gibt es Ortslinien. Beispielsweise erhält man als Ortslinie zu einem Punkt P im \mathbb{R}^3 eine Kugel mit Mittelpunkt P .

Darüber hinaus gibt es auch „Ortsbereiche“ und auch für Ortsbereiche gilt, dass alle seine Punkte eine gemeinsame Eigenschaft besitzen. Beispielsweise ist das Kreisinnere zusammen mit der Kreislinie eine Punktmenge $K = \{x : \overline{xM} \leq r\}$, wobei M den Mittelpunkt und r den Radius des Kreises bezeichne. Auf die selbe Weise bildet beispielsweise auch das Kreisäußere einen Ortsbereich mit der Eigenschaft „Abstand zu M ist größer als r “. Ebenso ist die Fläche zwischen zwei parallelen Geraden ein Ortsbereich usw.

Skizze zu „Ortslinie Kreis“, siehe S. ①



2.

Unterrichtliche Aktivitäten zum Thema Ortslinien beinhalten hauptsächlich Konstruktionen mit Zirkel und Lineal. Es ist wichtig, dass Schüler diese in geometrischer Hinsicht äußerst wichtigen Ortslinien konstruieren können. Konstruktionen mit Zirkel und Lineal bilden zum einen die Basis der anschaulichen Geometrie, auch geschichtlich gesehen. Sie fördern weiterhin das Vorstellungsvermögen der Schüler und außerdem auch deren Feinmotorisches Geschick und ihre Kreativität.

Konstruktionen werden von Schülern oft als schwierig empfunden, da sie mehrere Schritte beinhalten und weiterhin ist es den meisten wohl bewusst, dass es durch messen beispielsweise viel schneller gehen würde, eine Mittelsenkrechte oder Winkelhalbierende zu zeichnen.

Konstruiert, so können sie nun sehen, wie sich die Lage der Mittelsenkrechten verändert, wenn sie einen der beiden Punkte bewegen. Ein solches Vorgehen dient der Aufmerksamkeit, Anschaulichkeit und der Förderung der Vorstellungskraft der Schüler, weshalb es sehr empfehlenswert ist, im Geometrieunterricht ab und zu mit dynamischer Geometriesoftware zu arbeiten.

Ergänzend zur eigentlichen Konstruktion kann bei der Behandlung von Ortlinien beispielsweise auch auf das Falten von Papier zurückgegriffen werden.

Wie bei den Konstruktionen selbst arbeiten die Schüler hier enaktiv, was zu einer vielfältigen Vernetzung von Wissen führt.

Beispiele:

- mittelparallel zu 2 parallelen Geraden, welche durch 2 gegenüberliegende Kanten eines Blatt Papiers dargestellt werden → „Falten in der Mitte“
- mehrere parallele Geraden durch „Ziehharmonika-Falten“ erhalten
- winkelhalbierende zu einer der Ecken eines Blattes falten
- aufeinander senkrechte Geraden falten etc.

3. Die vorliegende Unterrichtsstunde soll auf die Stunde der Einführung des Umkreises folgen. Es werden nun besondere Eigenschaften von Dreieck und Umkreis erkundet.

1. Sachanalyse

- Ein Dreieck ist die Vereinigung von Strecken, welche 3 nicht auf einer Gerade liegenden Punkte miteinander verbinden.

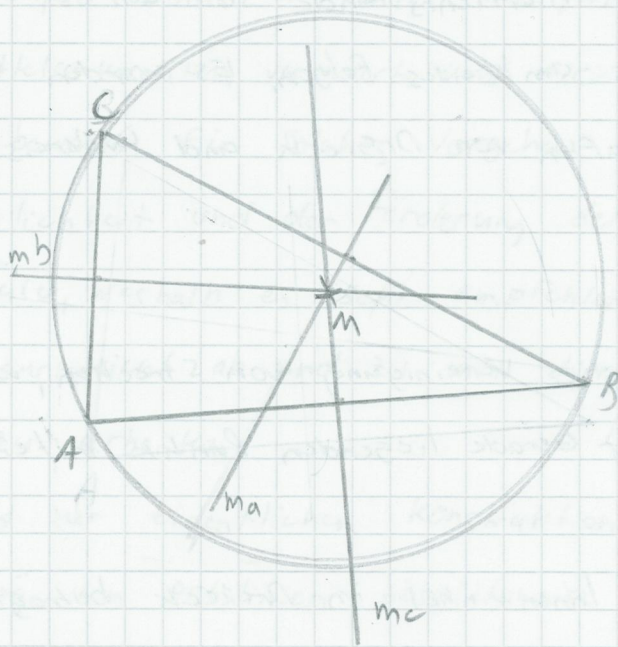
Die Summe der Innenwinkel im Dreieck beträgt 180° .

Man unterscheidet stumpfwinkliger (ein Winkel $> 90^\circ$), rechtwinkliger (ein Winkel $= 90^\circ$) und spitzwinkliger (ein Winkel $< 90^\circ$) Dreiecke.

Des Weiteren unterscheidet man allgemeine Dreiecke von gleichschenkligen (Basiswinkel und 2 Katheten gleich groß) und von gleichseitigen Dreiecken (alle 3 Seiten gleich lang, alle Winkel $= 60^\circ$).

Jedes Dreieck besitzt einen Umkreis (und auch einen Inkreis). Die Begründung erfolgt über die drei Mittelsenkrechten der drei Dreiecksseiten. Alle Punkte der Mittelsenkrechten haben von den jeweiligen Eckpunkten den gleichen Abstand. Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten hat somit den gleichen Abstand von allen drei Eckpunkten des Dreiecks. Deswegen ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks und alle drei Eckpunkte des Dreiecks liegen deswegen auf dem Umkreis.

* siehe S. 8 unten



- Definition der Mittelsenkrechten der Ortslinien, siehe 1
- Definition des Kreises als Ortslinie, siehe 1

2. Ziele der Unterrichtsstunde

2.1. Grobziel: Schüler lernen die Eigenschaft ~~von~~ von Umkreis am Dreieck kennen

* siehe S. ⑦ unten:

Der Mittelpunkt des Umkreises kann dabei im Inneren oder im Äußeren des Dreiecks oder auch auf einer Dreiecksseite liegen.

2.1. Feinziele:

- Schüler konstruieren Umkreise an verschiedenen Dreiecken (TZ 1)
- Schüler erkennen unterschiedliche Lagen, die der Umkreismittelpunkt einnehmen kann (TZ 2)

- Schüler erkennen, dass jedes Dreieck einen Umkreis besitzt (T2.3)

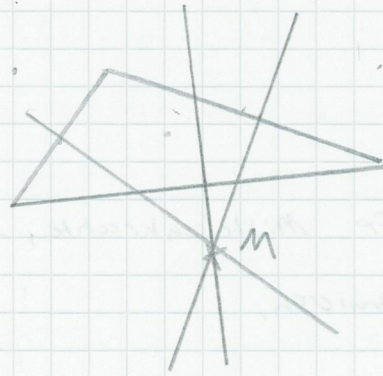
3. Lernvoraussetzungen

- Die Schüler kennen den Begriff Mittelsenkrechte, seine Bedeutung und können sie konstruieren.
- Die Schüler kennen aus der Vorstunde den Umkreis am Dreieck und können ihn konstruieren.
- Die Schüler kennen verschiedene Typen von Dreiecken: spitzwinklig, stumpfwinklig, rechtwinklig.
- Die Schüler können in Kleingruppen arbeiten.
- Die Schüler können in geometrische Hinsicht Problemlöser denken und Schlussfolgern.

4. Lernschwierigkeiten

- Probleme mit Konstruktionen, evtl. fehlerhaftes Konstruieren \rightarrow viel üben
- Schüler sehen nichts anhand ihrer Konstruktionen, zu viele "Linien" in einer Figur \rightarrow Hilfe: mit Farben arbeiten, z.B. Mittelsenkrechten farbig.

In einem stumpfwinkligen
Dreieck schneiden sich
die Mittelsenkrechten
außerhalb des Dreiecks.



Außerdem gilt: Jedes Dreieck besitzt einen Umkreis!

8. Didaktischer Kommentar

In der vorhergehenden Stunde wurde der Umkreis am Dreieck eingeführt, somit bietet es sich an mit einer Wiederholung der Konstruktionschritte zu beginnen, da die Schüler die Konstruktion in der vorliegenden UR-Stunde auch beherrschen müssen.

Der nächste Schritt findet in Gruppenarbeit statt, wobei jeder Gruppe 2 gleichartige Dreiecke bekommt und jew. den Umkreis konstruieren soll. Im Gespräch mit einander können sie vielleicht schon auf Gemeinsamkeiten, außerdem können sie sich somit gegenseitig bei der Konstruktion helfen und diese praktisch gemeinsam erarbeiten. Im Plenum werden dann die Ergebnisse gesammelt, verglichen und der Lehrer lenkt die Schüler im Gespräch auf Unterschiede zwischen den Folien/Dreiecken/Umkreisen. Möglicherweise erkennen die Schüler selbst, dass es sich jeweils um verschiedene Dreieckstypen handelt und daher die Unterschiede bzgl. der Lage der Umkreismittelpunkte herleiten, kommen die Schüler nicht selbst darauf, müssen sie vom Lehrer dorthin gelenkt werden, damit sie die Zusammenhänge erkennen und nachvollziehen können. Die Folien dienen

dabei natürlich der Veranschaulichung. zur Ergebnisorientierung wird ein Hefteintrag erstellt. Die nächste Problemstellung (gibt es ein Dreieck, das keinen Umkreis hat?) wird in Partnerarbeit bearbeitet. Dies bietet sich an, da die Schüler miteinander kommunizieren müssen und können und sie sich somit über mögliche Lösungen des Problems oder über Meinungen austauschen, gegenseitig korrigieren, etc. können. Die Beschäftigung in Partnerarbeit mit dem Problem dient natürlich der Problemlösefähigkeit, die SS müssen abstrakt denken, Hypothesen aufstellen, ausprobieren, modellieren, etc. Auch das Ergebnis dieser Phase wird im Hefteintrag gesichert. Im Geometrieunterricht eignet sich das selbstentdeckende Lernen besonders gut, da hier mit der Partnerarbeit gearbeitet werden kann. Außerdem dient es der Motivation und Lernfreude der Schüler.