

Die Subtraktion ist eine der vier Grundrechenarten der Arithmetik. Unter ihr wird auch das Abziehen einer Zahl von einer anderen verstanden.

Die Differenz $m-n$ zweier natürlicher Zahlen m und n ist die Kardinalzahl bzw. die Mächtigkeit der Differenzmenge $A \setminus B$ von zwei disjunkten Mengen A und B mit den Kardinalzahlen m bzw. n . Bzw. kurz:

$$m-n = \text{card } A \setminus B \text{ falls } A \cap B = \{\emptyset\}, \text{ card } A = m; \text{ card } B = n$$

m wird dabei Minuend genannt, dies ist die Zahl von der etwas abgezogen wird und n heißt Subtrahend dies ist die Zahl die abgezogen wird.

Bei den schriftlichen Verfahren der Subtraktion bzw. bei schriftlichen Verfahren im Allgemeinen ist die Vorgehensweise bzw. die Notation vorgeschrieben und im Gegensatz zum halbschriftlichen Rechnen bei dem mit Zahlen gerechnet wird, wird hier mit Ziffern gerechnet.

Die Notation einer Subtraktionsaufgabe im schriftl.

Verfahren ist wie folgt aufgebaut. Der Subtrahend

wird unter den Minuend geschrieben. Vor die Aufgabe

wird das für das Minusrechnen verwendete Rechenzeichen

"-" Minus geschrieben und unter den Subtrahend wird

ein Strich mit gegebenenfalls Abstand für Überträge (beim

Ergänzungungsverfahren angezeichnet. Die Zahlen werden so

untereinander geschrieben, dass sie stellengerecht und

rechtbündig untereinander stehen.

Hierzu ein Beispiel

$$\begin{array}{r} 436 \text{ Minuend} \\ -218 \text{ Subtrahend} \\ \hline \end{array}$$

Ergebnis = Differenzwert

Zur schriftlichen Subtraktion gibt es zwei verschiedene Verfahren zum Einen das Ergänzungsverfahren und zum Anderen das Entbündelungsverfahren, diese sollen nun erläutert werden.

a) Das Ergänzungsverfahren

Beim Ergänzungsverfahren wird nicht subtrahiert, sondern der Subtrahend umgekehrt zum Minuend erhöht. Der Subtrahend wird unter den Minuend geschrieben, so dass die einzelnen Stellen übereinander stehen und dann wird Stelle für Stelle von rechts nach links subtrahiert bzw. ergänzt. Ist der Minuend zu klein wird dieser um 10 erhöht. Diese 10 wird sich aber nicht „geborgt“, sondern als 1 in die nächste linksseitige Spalte zum Subtrahend notiert, um bei der Abarbeitung der nächsten Stelle zu berücksichtigen.

Hierzu ein Beispiel um dieses Verfahren besser zu veranschaulichen

$$\begin{array}{r} 436 \\ - 148 \\ \hline 8 \end{array}$$

Zunächst wird die Einerstelle berechnet $6 - 8 = 6$ geht nicht, da die angestrichene Ziffer zu klein ist, also wird die Einerstelle um zehn erhöht und die Eins in der nächsten linksseitigen Spalte notiert. $8 + \dots = 16$ geht. Das Ergebnis wird in die jeweilige Stelle unter den Strich geschrieben.

$$\begin{array}{r} 336 \\ - 148 \\ \hline 88 \end{array}$$

Nun wird die Zehnerstelle berechnet $(4+1) - 4 = 8$ geht nicht genau wie oben wird die angestrichene Zahl 3 um 10 erhöht man erhält 13 $13 - 4 = 9$ Das Ergebnis wird wieder unter den Strich in die jeweilige Spalte (hier Zehnerspalte) geschrieben und die 1 in der Hunderterspalte zum Subtrahend notiert.

$$\begin{array}{r} 436 \\ - 148 \\ \hline 288 \end{array}$$

Dann wird die Hunderterspalte berechnet $2t... = 4t$
geht, somit wird das Ergebnis 2 direkt unter den
Strich in die Zehnerspalte geschrieben.

Das Ergänzungsverfahren ist also ein schriftliches Subtraktions-
verfahren bei dem nicht subtrahiert wird sondern der Subtra-
hendi umgekehrt zum Minuend ergänzt wird.

b) Das Entbündelungsverfahren.

Das Entbündelungsverfahren ist das seit 2007 im
bayerischen Lehrplan vorgeschriebene schriftliche Verfahren
in der Grundschule. Das Ergänzungsverfahren kann aber
trotzdem noch zusätzlich eingeführt werden.

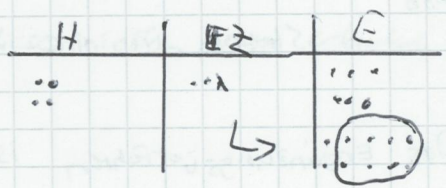
Das Subtrahieren mit Entbündeln meint, dass bei Abzug
des Subtrahenden im Falle das dieser an der jeweilig zu
bearbeitenden Stelle größer als der Minuend ist, eine
Zehner von der nächsten linksseitigen Stelle borgt und
diese um Eins erniedrigt wird.

Konkret heißt dies auch hier wird der Subtrahend
unter den Minuend geschrieben und von links nach rechts
Stelle für Stelle abgearbeitet. Jedoch wird hier nicht
umgekehrt zum Minuenden ergänzt, sondern es wird
tatsächlich subtrahiert. Ist jedoch der Minuend an der
zubearbeitenden Stelle zu klein wird die linke Nachbar-
stelle um Eins erniedrigt und die zubearbeitende
Stelle um 10 erhöht.

Auch dieses Verfahren soll nun am Beispiel $436 - 148$ erläutert werden.

$$\begin{array}{r} 216 \\ 436 \\ -148 \\ \hline 88 \end{array}$$

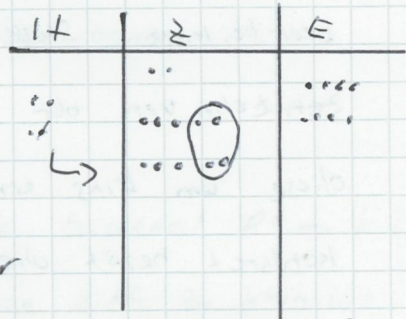
Beginn mit der Einerstelle
 $6 - 8 =$



6 ist größer als 8
 also muss ich eine Zehnerstelle entbündeln ich erhalte also 16 Einer und behalte 2 Zehner,
 Dies kennzeichne ich, indem ich die Einerstelle durch streiche und 16 darüber schreibe und die Zehnerstelle ebenfalls durchstreiche und die behaltene Zehner darüber schreibe. $16 - 8 = 8$ das Ergebnis wird in die Einerspalte geschrieben.

$$\begin{array}{r} 12 \\ 3716 \\ 436 \\ -148 \\ \hline 88 \end{array}$$

Nun rechne ich die Zehnerstelle
 $2 - 4 = 2 > 4 \Rightarrow$



Ich muss einen Hunderter entbündeln erhalte also 12 Zehner und behalte 3 Hunderter, Dies kennzeichne ich wieder durch durchstreichen und darüber schreiben $12 - 4 = 8$ das Ergebnis wird unter den Strich in die "Zehnerspalte" geschrieben.

$$\begin{array}{r} 12 \\ 3716 \\ 436 \\ -148 \\ \hline 288 \end{array}$$

Nun wird die Hunderterstelle berechnet $3 - 1$
 \Rightarrow geht das Ergebnis wird direkt unter den Strich in die "Hunderterpalte" geschrieben

Das Entbündelungsverfahren bei dem Subtrahiert wird.

Ist der Minuend an der jeweiligen zu berechnenden Stelle zu klein bzw. kleiner als der Subtrahend an dieser Stelle wird eine „Anleihe“ von linksseitigen Nachbar des Minuend gemacht. Indem dieser um 1 erniedrigt also ein Zehner, hundertster entbündelt wird und in die zu berechnende Stelle als 10 Einheiten ergänzt wird. Da ja ein Hunderter, zehn 10er darstellen oder ein Zehner in 10 Einer zerlegt entbündelt werden kann,

2) Vor- und Nachteile der in ~~1.2~~ genannten Verfahren
 Vorteil des Ergänzungsverfahrens ist, dass durch dieses Verfahren auf Aufgaben vorbereitet wird, bei denen von einem Minuenden mehrere Subtrahenden abgezogen wird.

Bsp.
$$\begin{array}{r} 843 \\ - 252 \\ - 124 \\ \hline \end{array}$$

Einerstelle

$4 + 2 + \dots = 3$ geht nicht ich erhöhe den Minuend um 10 erhalte 13

$4 + 2 + \dots = 13$

geht und so weiter.

Hier müssen keine Stellen entbündelt werden, was bei einem solchen Aufgabentyp mit mehreren Subtrahenden sehr schwierig werden kann, da unter Umständen mehrere Stellen entbündelt werden müssen. Dies stellt also einen Nachteil beim Entbündelungsverfahren dar, hier muss bei mehreren Subtrahenden gegebenenfalls mehrmals entbündelt werden, was zur Unübersichtlichkeit und Schwierigkeiten führen kann.

Jedoch hat das Entbündelungsverfahren den Vorteil, dass meist in Sachsituationen bei denen subtrahiert werden soll, dass entbündeln gebraucht wird. Es ist für Schüler leichter nachzuziehen, dass bei einer Subtraktionsaufgabe

„Minus“ gerechnet wird und nicht wie beim Ergänzungsverfahren aufaddiert bzw. Ergänzt wird. Das Ergänzungsverfahren aufaddiert bzw. Ergänzt wird. Das Ergänzungsverfahren wird in solchen Sachsituationen eher als unnatürlich empfunden und für die Schüler oft in Frage gestellt: „Warum muss ich „Plus“ rechnen“ wenn ich was „Abziehen“ will?“

Außerdem kann das Ergänzungsverfahren gut durch geeignete Materialien - verdeutlicht werden z.B. durch Hunderterfelder, Zehnerstreifen und Einerplättchen. Eine Aufgabe kann wie folgt

$$\begin{array}{r} 231 \\ - 112 \\ \hline \end{array}$$

veranschaulicht werden. Die Kinder können

Hunderter, Zehner und Einerpacken packen, in denen

sie den Minuenden verpacken. Im Beispiel packen sie also

2 Hunderterpacken, 3 Zehnerpackchen und ein Einerpackchen. Nun

sollen sie den Subtrahend aus den Packen abziehen. Der

Schüler öffnet also das Einerpackchen indem ein-Einer enthalten

ist soll aber zwei Einer entfernen. So erkennt der Schüler,

dies funktioniert nicht und nimmt einen Zehnerstreifen aus

dem Zehnerpacken, diesen zerlegt er in zehn und gibt ihn, in

das Einerpackchen hinzu. Nun kann er zwei Einer aus dem

Einerpacken entfernen und so weiter. Die Schüler beschäftigen

sich so mit einer Subtraktionsaufgabe sowohl enaktiv als

handelnd (durch das Packen und Entpacken der Packchen)

und ikonisch (durch die geeigneten Materialien Zehnerstreifen, ...)

als auch symbolisch (durch die Notation in Ziffern).

Die Subtraktionsaufgabe wird also optimal veranschaulicht.

Ein weiterer Vorteil des Entbündelungsverfahrens ist, dass die

Schüler, dass Gegenverfahren „Bündeln“ bereits aus der

Addition kennen und so leicht auf das Entbündeln

schließen bzw. es durch wenig Erklärung und relativ

unkompliziert ausführen können.

Eine weiterer Nachteil des Entbündelungsverfahrens sollte, jedoch nicht verschwiegen werden. Beim Entbündelungsverfahren können Aufgabenstellungen bei denen sich mehrere Nullen im Minuenden befinden zu großen Schwierigkeiten führen.

Zum Beispiel
$$\begin{array}{r} 2004 \\ - 168 \\ \hline \end{array}$$
 hier muss beim Entbündelungsverfahren über zwei Stellen entbündelt werden, es ist also eine dementsprechende Voraussicht nötig. Hier kann es jedoch helfen auf ein vorheriges abgewandeltes Verfahren des schriftl. Entbündelungsverfahrens nämlich dem Vorabentbündelungsverfahrens zurück zugreifen. In diesem Verfahren werden zunächst alle zu kleinen Stellen entbündelt um dann in einem nächsten Schritt nur noch subtrahieren zu müssen.

Das Entbündelungsverfahren bietet also einen enormen Vorteil gegenüber dem Ergänzungsverfahren durch die gute Lernanschaulichung und somit besseren Nachvollziehbarkeit. Jedoch hat es auch zwei Nachteile bzw. Schwachstellen die sich bei Aufgaben mit mehreren Subtrahenden bzw. bei Aufgaben mit Nullen im Minuenden zeigen. Hier ist häufig, dass Ergänzungsverfahren leichter abzuwenden.

Es ist also sinnvoll nicht nur das vorgeschriebene Entbündelungsverfahren, sondern auch als Ergänzung und Hilfestellung das Ergänzungsverfahren zu thematisieren.

R

3. Unterrichtseinheit zum Thema schriftliche Subtraktion mit Übergang mit didaktischer Analyse / Begründung

Sachanalyse (siehe Aufgabe 1)

Lehrplanbezug

Die Einführung der schriftlichen Subtraktion ist in der 3. Klasse ein Thema, es soll im engen Zusammenhang mit der schriftl. Addition eingeführt werden

Voraussetzungen / Vorkenntnisse der Schüler

Schüler kennen bereits

- Bündelungsverfahren aus Addition
- schriftl. Subtraktion ohne Übertrag
- Aufgaben legen in Stellenwerte

Lehrziele:

Grobziel: Schüler sollen das schriftliche Entbündungsverfahren kennen und anwenden ~~können~~ lernen.

Feinziele: Schüler sollen das schriftl. der Verfahren ohne Übertrag wiederholen

- sollen das Entbündeln durchführen können und verstehen
- sollen erkennen, dass wenn ~~sie~~ der Minuend kleiner als der Subtrahend (an der jeweiligen Stelle) ist, entbündelt werden muss.

Didaktische Analyse / Gesichtspunkte

Im Folgenden sollen didaktische Entscheidungen am Unterrichtsverlauf verdeutlicht werden.

Der Einstieg erfolgt durch ein Spiel, in dem die Schüler die Notation vom schriftlichen Verfahren wiederholen. Für jede richtig gelöste Aufgabe erhält ~~der~~ Schüler einen Stern den er unter die Aufgabe klebt, dies wird bewusst so gestaffelt. Da die Schüler hier selbst entscheiden können habe ich mich nur in die Reihe hinter dem Ergebnis eingereiht, weil dort so viele andere Schüler standen, oder ~~weil~~ weil ich es wirklich wusste. Zum Anderen kann Lehrer in einer Werkstattkontrolle feststellen ob Schüler sein Vorgehen als richtig entfindet:

Die Problemstellung wird bewusst mit einer großen Aufgabe eingeführt das verhindert werden kann, dass Schüler diese im Kopf ausrechnen können. Es wird also dadurch weitgehend sichergestellt, dass S. auf das Problem stoßen.

Die Schüler sollen dann selbständig durch Hilfestellung des Lehrers auf die Entbündelung kommen.

Hier kommen die Arbeitsmaterialien Hundertertafel, Zehnerstreifen, Plättchen zum Einsatz, da diese den Schülern bereits aus dem Bündeln der Addition bekannt sind und sich mit ihnen die Stellenwerte gut darstellen lassen. Somit die Notwendigkeit des Entbündelns bei einem zu kleinen Minuenden an der jeweiligen Stelle eigenständig durch die Schüler erkannt werden kann.

Zunächst werden Aufgaben mit zu kleinen Minuenden im Einer, Entbündelung eines Zehners eingeführt,

und dann an Aufgaben mit Entbündelung des hunderters wegen zu kleiner Zehnerstelle im Minusend, noch einmal an der Tafel durchgeführt. Da somit verhindert werden kann, dass Schüler den Aufgabentypen zu „kleiner Einer“ verstehen aber bei Aufgabentypen „zu kleiner Zehner“ nicht wissen wie sie Entbündeln müssen und, dass ~~das~~ auch hier nur 10 (Zehner) ergänzt und nicht die Zahl 100 ergänzt werden muss.

Hier können Schüler die das ~~Ver~~ Verfahren bereits verstanden haben, dann bereits in die Übungsphase übergehen und sich an den verschiedenen Schwierigkeitsstufen versuchen.

Schwächere Schüler haben die Gelegenheit nochmal an der Tafel im Plenum zu üben.

Das Arbeitsblatt/Anleitungsblatt steht dazu, dass die Schüler zum Einen das Verfahren des Entbündelns nochmal Schritt für Schritt bei Unsicherheiten noch einmal darauf zurückgreifen können.

Die Übungsphase wird mit verschiedenen Aufgabentypen mit unterschiedlichen Schwierigkeitsgraden durchgeführt, da so eine Differenzierung und somit eine Förderung jede Einzelnen gewährleistet ist.

In einer nächsten Einheit kann dieses Verfahren der Entbündelung noch weiter vertieft werden und gegeben falls als Hilfestellung das Ergänzungsverfahren zusätzlich eingeführt werden.

Unterrichtsverlauf

Phasen

Artikulationsstufen

Einstieg

Die Lehrkraft hängt

Spiel 1, 2 oder 3

eine Subtraktionsaufgabe
ohne Übertrag an die
Tafel. Die die Schüler
schriftl. Rech. Rechnen

sollen z. B.

$$\begin{array}{r} 785 \\ -321 \end{array}$$

Die Lehrkraft hängt drei
verschiedene Lösungen von
denen eine richtig ist an
die Tafel und darunter
jeweils eine Taschenlampe.
Die Schüler sollen zunächst die
Aufgabe zunächst im Kopf
rechnen und dann sich
jeweils hinter dem richtigen
Ergebnis in eine Reihe
aufstellen.

L: Ob du wirklich richtig
stehst schst du wenn das
Licht angeht.

L: alle S. die richtig
gestanden sind dürfen einen
Stern nehmen und unter die
Aufgabe im Heft kleben

L: Bevor ich die nächste
Aufgabe an die Tafel hänge
kannst du mir bestimmt
noch einmal die Regeln
nennen die du beim schriftl.
Rechnen beachten bzw. wie
du vorgehen musst.

S: Ich muss die Zahlen
untereinander schreiben
den Minuend oben den
Subtrahend darunter.
So dass sie stellengerecht
und rechtsbündig
untereinander stehen.

Dann muss ich einen
Strich unter die Rechnung
ziehen und danach rechne
ich Stelle für Stelle von
links nach rechts aus und
schreibe das jeweilige Ergebnis
in die jeweilige zugehörige
Spalte ~~aus~~ unter dem Strich.

L: hängt noch weitere Aufgaben
ohne Übertrag an die Tafel
(Spiel kann mehrmals wdh. werden)

Problemstellung

L. hängt Aufgabe an die Tafel bei den ein Übertrag notiert werden muss z.B.

$$\begin{array}{r} 642 \\ - 218 \\ \hline \end{array}$$

S. stellen fest das dies mit dem Verfahren nicht geht

L. ist 642 größer als 218

S. da ist es es

L. dann muss es doch gehen. Überlegt gemeinsam wie du vorgehen könntest um die Aufgabe schriftlich zu lösen.

Problemlösung

S. äußern ihre Ideen Hilfsimpulse:

L. hängt die Aufgabe in Form von Hunderterfelder, Zehnerstreifen Einer in eine Stellenwerttafel an die Tafel.

L. Hilfsimpulse:

- L. nimmt einen ~~10er~~ 10er Streifen und zerschneidet ihn in Einer

- L. denkt an die Addition

- L. Ein Zehner besteht aus 10 Einern.

S. Ich muss einen Zehnerstreifen wegnehmen diesen in Einer zerlegen dann ~~habe~~ habe ich 12 Einer und kann 8 abziehen.

L. sehr gut und wie machst du diesen Schritt in deiner Rechnung deutlich

S. ich streiche die jeweilige Stelle durch hier die Einer und schreibe die gewonnenen Einer darüber

L. Achtung was musst du an der Zehnerstelle beachten?

S. die muss ich durchstreichen und um Eins verringern, weil ich mir dort ja einen Zehnerstreifen geborgt habe.

L. sehr gut hängt noch zwei weitere Aufgaben mit Übertrag an der Einerstelle an die Tafel. Die einzelne Schüler exemplarisch mit Hunderterfeldern, Zehnerstreifen und Einer an die Tafel legen sollen und dann gleiche Schüler oder andere Schüler schriftlich mit Ziffern notieren sollen.

Problemstellung

L. hängt nun weitere Aufgabe an die Tafel bei der der Übertrag an der leer Stelle durchgeführt werden muss.

$$\begin{array}{r} \text{z.B. } 462 \\ - 287 \\ \hline \end{array}$$

Problemlösung
zwei

S. nun muss ich mir einen
Hunderter nehmen und diesen Ent-
bündeln, bekomme also 10 Zehner
dazu und kann 16 Zehner minus
8 Zehner erreichen.

L. hängt zwei weitere Aufgaben
dieses Typs an die Tafel die
wieder gemeinsam im Plenum
erarbeitet werden sollen. Differen-
zierung Schüler die das Schema
bereits verstanden haben können auch
schon früher in die nächste frei-
Rechenphase übergehen

Fixierung

L. Du bekommst nun ein
Arbeitsblatt auf dem eine
Anleitung steht wie du bei
Aufgaben mit Übertrag schriftlich
subtrahierst
L: Gibt es noch Fragen zu
diesem Blatt

Übung / Vertiefung

L: Nun nimmst du dir deine
Hunderterfelder, Zehnerstreifen
und Einerplättchen die
du bereits aus der Abbildung
hast.
L: hier vorne sind verschiedene
Aufgabentypen die mit
Ampelfarben gekennzeichnet
sind.

Kennzeichnung
für den Lehrer
Schüler wissen
das Schwierigkeits-
grad von grün
nach rot steigt

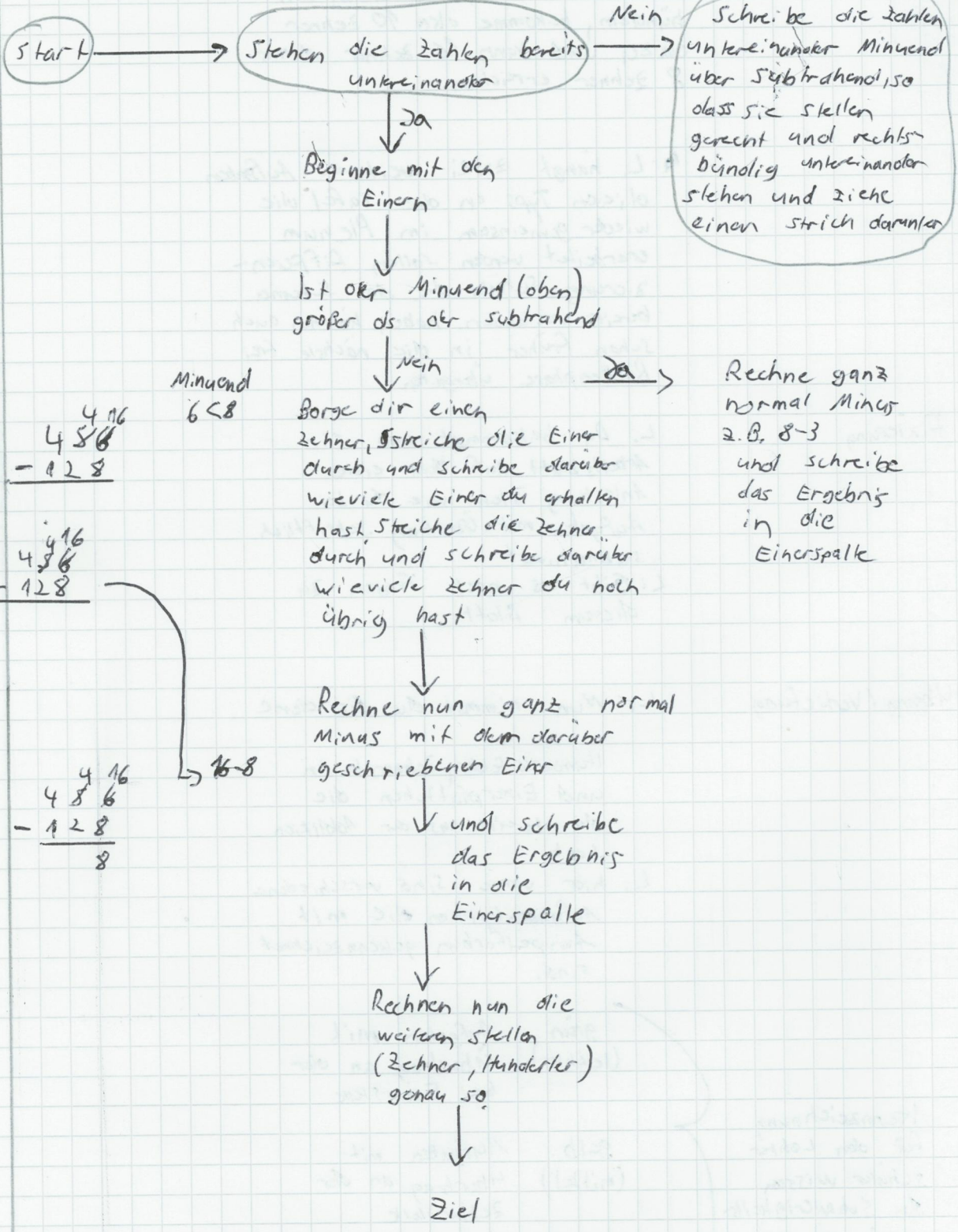
grün: Aufgaben mit
(leichter) Übertrag an der
bei Einerstelle

gelb: Aufgaben mit
(mittel) Übertrag an der
Zehnerstelle

rot: Aufgaben mit
(schwer) Übertrag an der
Einer und Zehnerstelle

dunkelrot: Aufgaben mit
(nur für S. einer Null im
die das
Verfahren
schon eindeutig
verstanden haben

L. Das Ergebnis und Verfahren steht jeweils
auf der Rückseite



$$\begin{array}{r} 416 \\ 486 \\ - 128 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 416 \\ 486 \\ - 128 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 416 \\ 486 \\ - 128 \\ \hline 8 \end{array}$$

Minuend
6 < 8

→ 16-8