Thema Nr. 3

Der Übergang von den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ zu den Bruchzahlen wird dadurch nötig, dass der Zahlenbereich $\mathbb{N}$ nicht abgeschlossen ist. Denn Schülern ist dies anhand eines konkretes Beispiels bewusst gemacht.

Bisher konnten sie Gleichungen der Form $8 \cdot x = 40$ problemlos lösen.

Entweder sie bekamen die Lösung durch Probieren („Mit welcher Zahl muss ich 8 multiplizieren um 40 zu erhalten") oder sie lösen sie durch die Gegenoperation:

$$8 \cdot x = 40 \quad / : 8 \quad \text{Äquivalenzumf.}$$
$$x = 5$$

Damit war die Aufgabe gelöst.

Nun jedoch sehen sich die Schüler mit dem Problem konfrontiert:

$$8 \cdot x = 5$$

Durch Probieren werden die Schüler ~~Schüler~~ nicht auf die Lösung kommen,

da $8 \cdot 0 = 0$
$8 \cdot 1 = 8$ ist

Die 5 liegt damit zwischen 0 und 8

Denn Schülern wird dadurch verdeutlicht, dass es noch Zahlen zwischen 0 und 1 geben muss.
Veranschaulichen kann man diesen Sachverhalt dadurch, dass man die Zahlenhalbgerade betrachtet bzw. den Schülern mit Hilfe ihres Lineals zeigt, das zwischen 0 und 1 noch weitere „Striche" - welche für Zahlen stehen existieren.
Durch diese Vorarbeit werden die Schüler einsehen, dass die Aufgabe mit einem „geht doch gar nicht" nicht gelöst ~~werden~~ ist.
Zurück zur eigentlichen Aufgabe:
Um ~~das~~ die Gleichung $8 \cdot x = 5$ zu lösen kann man die Schüler dazu auffordern, den gleichen Weg zu gehen wie beim Beispiel $8 \cdot x = 40$. ~~Durch die~~ Anhand der Gegenoperation werden die Schüler erkennen dass man für die Lösung der Zahl x durch 8 dividieren muss.
So erhält man die elementare Form der Gleichung und kann die Lösung ~~ab~~ direkt ablesen.
Im ersten Bsp. wäre dies $x = 40 \cdot 8$

im zweiten $x = 5 : 8$.

Bei $40 : 8$ werden die Schüler die ~~Regeln~~ Division nach den altbekannten Regeln durchführen. Jedoch sind diese bei $5 : 8$ nicht anwendbar, da nach dem jetzigen Wissensstand der Schüler „die 8 nicht in die 5 geht". ~~Damit stehen die Schüler vor dem nächsten Problem. Hier liegt es nun an dem Lehrer, den Schülern zu vermitteln, dass in einem solchen Fall eine Null hinzuzufügen ist~~

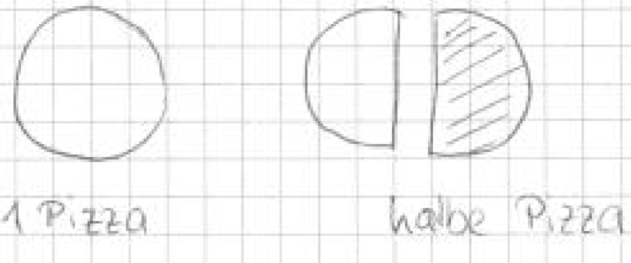
Somit ist nun der Punkt erreicht, an dem der Lehrer die Bruchschreibweise einzuführen hat. Er hat den Schülern zu erklären, dass $5 : 8$ und $\frac{5}{8}$ das gleiche ist.

Um diesen für die Schüler vielleicht abstrakt wirkenden Schritt ~~Ba~~ nachvollziehbarer zu machen, wird nun auf Alltagswissen der Schüler zurückgegriffen. Dies führt zum Größenkonzept der Bruchrechnung. Dabei werden den Schülern Alltagssituationen aufgezeigt, in denen sie schon bisher mit Brüchen konfrontiert ~~wurden~~ waren.

$\frac{1}{4}$ l Milch, $\frac{1}{4}$ Stunde, $\frac{1}{2}$ Pizza.

Mit Hilfe dieser Alltagsgrößen kann den Schülern der Zusammenhang zwischen der Divisionsdarstellung und der Bruchdarstellung deutlich gemacht werden.

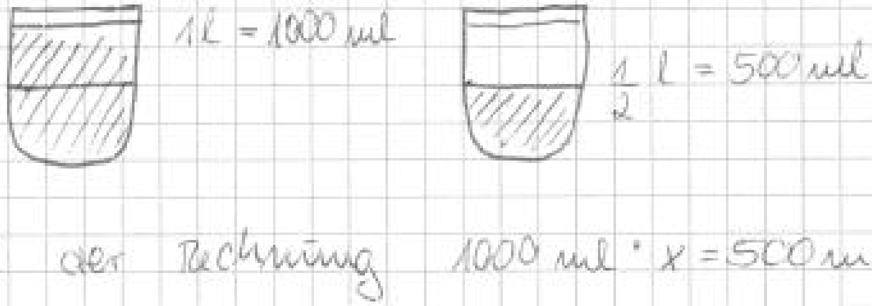
Beispiel: Pizza



Hieran wird ersichtlich, dass eine Pizza halbiert wurde. Man hat damit aus einem Teil zwei gemacht, dadurch 1 : 2 bzw. $\frac{1}{2}$.

Oder auch anhand eines Messbechers können Brüche gut veranschaulicht werden.

Hier sind häufig l-angaben und Milliliterangaben zu sehen.



Anhand der Rechnung $1000\,ml \cdot x = 500\,m$

wird deutlich, dass 500 : 1000 geteilt werden muss bzw. $\frac{500}{1000}$.

In diesem Zusammenhang können die Schüler gleich mit dem Kürzen von Brüchen vertraut gemacht werden.

Im Vorfeld zur Einführung der rationalen Zahlen wurden bereits Teiler, ggT und kgV durchgenommen.

Nun sollen die Schüler beide Zahlen 500, 1000 in Teiler zerlegen.

$500 = 5 \cdot 100$

$1000 = 10 \cdot 100$

$$\frac{500}{1000} = \frac{5 \cdot 100}{10 \cdot 100} = \frac{5}{10} = \frac{5 \cdot 1}{5 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

Das Kürzen wird den Schüler einleuchtend erschienen, u.a. wenn man vorher solche Aufgaben wie 200 : 100, d.h. $\frac{200}{100}$
20 : 10, d.h. $\frac{20}{10}$ rechnen lässt.

Da sie nämlich hier das Ergebnis sofort ausrechnen können, wird es ihnen auch einleuchten, da $\frac{200}{100} = \frac{20}{10} = \frac{2}{1}$.

Eine Schwierigkeit, die allerdings häufig auftritt, ist die Sache mit der von Schülern häufig als „unsichtbar" bezeichneten „1".

Im Bsp. $\frac{5}{10} = \frac{5}{5 \cdot 2} = \frac{}{2}$ passiert

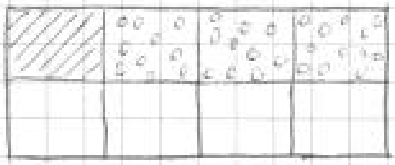
häufig der Fehler, dass die 1 im Zähler vergessen wird und im einem weiteren Schritt aus „$\overline{2}$" ein 2 wird. Deswegen sollte man die Schüler gezielt darauf aufmerksam machen, dass es ja „eine fünf" ist und damit $1 \cdot 5$. Damit kann man dieses Problem aus dem Weg räumen.
Nachdem die Schüler nun mit der Schreibweise eines Bruches vertraut sind $x = \frac{p}{q}$ (($q \neq 0$) p, q∈ kann man ihnen den Unterschied zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}_0^+$ erklären.
Schließlich ist es wichtig, wofür die Abkürzungen der Zahlenmengen stehen, da die Grundmenge entscheidend für für die Lösungsmenge ist.
Nach welcher Methode man die rationalen positiven Zahlen ~~Z~~ $\mathbb{Z}_0^+$ eingeführt hat, bleibt jedem Lehrer selbst überlassen. Er kann selbst entscheiden, welches Konzept er seinen Ausführungen zugrunde legt.

- Äquivalenzkonzept
- Operatorkonzept
- Größenkonzept
- Gleichungskonzept

weitere Schwierigkeiten die bei den Schülern auftreten, sind die Rechenoperationen in der „neuen" Zahlenmenge.

z. B. $\frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{16}$ (d. h. 1+3) (d. h 8+8)

Die Schüler addieren Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner.
Den Schülern muss spätestens in diesem Zusammenhang der Unterschied zwischen Zähler und Nenner bekannt gemacht werden.
Am einfachsten funktioniert das mit einem anschaulichen Bsp.



Wir haben einen Kinderriegel mit acht Kammern.
Zunächst isst man eine Kammer, kurze Zeit später isst du weitere ~~zu~~ 3 Kammern.
Wieviele Kammern hast du insgesamt gegessen?
Damit wird den Schülern klar, dass $\frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8}$ ist und der Nenner lediglich für die Anzahl der Teile steht.

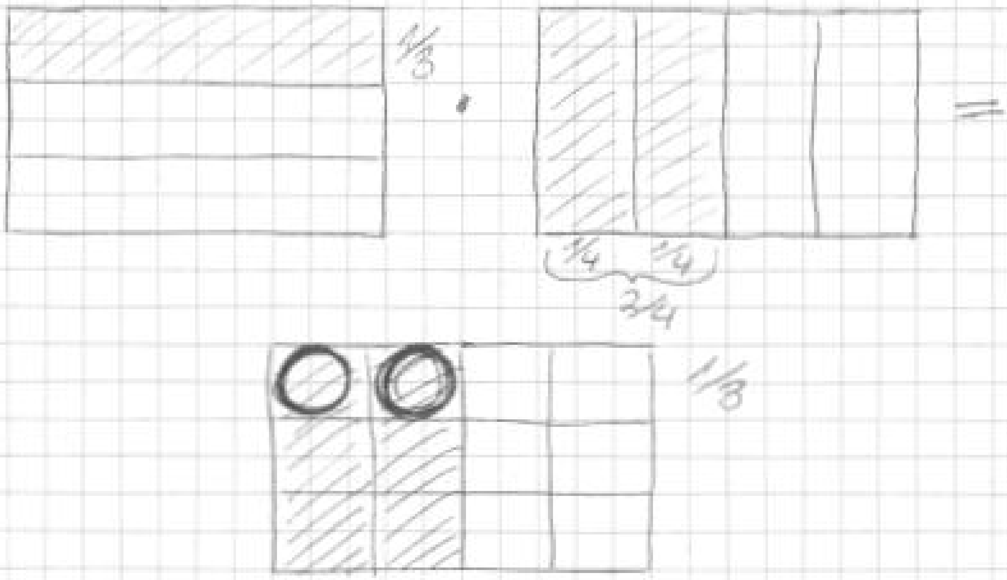
Das wichtigste Problem wird allerdings höchstwahrscheinlich dann auftreten, wenn ungleichnamige Brüche addiert werden sollen. $\frac{1}{4}+\frac{3}{12}$

Hier wird den Schülern bewusst gemacht, dass man zur Addition von zwei Brüchen den Hauptnenner bilden muss.
Ähnliche Probleme treten auch bei der Subtraktion auf.
Bzgl. der Multiplikation können die Schüler mit weiteren Problemen konfrontiert werden.

z. B. $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}$

Analog der Addition werden die Schüler womöglich auf die Idee kommen, die Brüche gleichnamig zu machen, d. h. $\frac{4}{12}\cdot\frac{6}{12}$ und anschließend lediglich die Zähler multiplizieren, so dass sich $\frac{24}{12}$ ergeben.

Das die Multiplikation jedoch nach anderen Regeln abläuft, erkennt man nach Veranschaulichung von $1/3 \cdot 2/4$.



$$\Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} = \frac{2}{12}$$

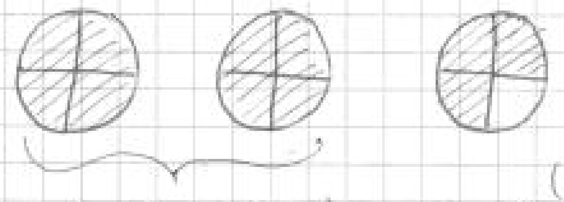
Somit wird deutlich, dass man bei der Multiplikation Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.
Ein anderes Problemfeld, dass sich ergeben kann liegt in den verschiedenen Arten der Brüchen.
Man unterscheidet:

- echte Brüche (z. B. $1/3$)
- unechte Brüche (z. B. $4/3$)
- Scheinbrüche (z. B. $6/3$)

(d. h. $\frac{p}{q}$ mit q ist Teiler von p)

- gemischte Brüche (z. B. $\frac{1}{3}$)
- Dezimalbrüche
  - endlich (z. B. 0,75)
  - unendlich (z. B. periodisch $0,\overline{6}$ $0,16\overline{7}$)
    nicht periodisch π, e

Am problematischten sind dabei u. a. die gemischten Brüche.
Schüler fassen das $2\frac{3}{4}$ falsch auf und machen daraus $2 \cdot \frac{3}{4}$ so dass sich aus $2\frac{3}{4} = \frac{6}{4}$ ergeben.
Dass ~~der~~ die Ziffer zwei für Ganze stehen soll, ist den Schülern häufig nicht klar. Daher sollte man den Schülern auch hier wieder ein anschauliches Bsp. geben.



(viertel)
2 ganze Torten + 3 Stücke
$= \frac{8}{4} + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$

Gemischte Brüche bereiten häufig auch Schwierigkeiten, wenn mit ihnen Rechenoperationen durchgeführt werden sollen. z. B.

$1\frac{3}{4} + 2\frac{7}{3}$

Schüler machen daraus: $1 + 2 + \frac{3}{4} + \frac{7}{3}$

$$= 3 + \frac{9}{12} + \frac{28}{12} = \frac{36}{12} + \frac{9}{12} + \frac{28}{12} = \frac{67}{12} = 5\frac{7}{12}$$

Die richtige Lösung entspricht jedoch

$$7/4 + 13/3 = \frac{21}{12} + \frac{52}{12} = \frac{73}{12} = 6\frac{1}{12}.$$

Man muss somit bei verschiedenen Nennern erstmal die „Ganzen" wieder zurück in Bruchform bringen, d.h. den gemischten Bruch in einen unechten Bruch.
Es gibt noch eine Vielzahl von weiteren Fehlern, die bei den Schülern im Zusammenhang mit den Bruchzahlen auftreten können. Jedoch muss hierbei v.a. auf die individuellen Schwierigkeiten geachtet werden und mit entsprechenden Übungen & Wiederholungen diese aus dem Weg geräumt werden. Denn Fehler in der Bruchrechnung wären von enormer Tragweite, da Bruchrechnung einen im Schulleben (z.B. Prozentrechnen) und im Alltag immer wieder einholen wird.

Aufgabe 2

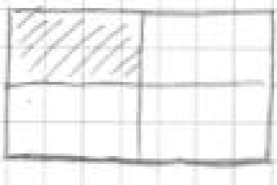
Der Größenvergleich von Brüchen kann auf versch. Arten erfolgen.
Die einfachste Art findet man bei gleichnamigen Brüchen:

$\frac{1}{6} < \frac{2}{6}$

Dass dem so ist, ist offensichtlich, da $1<2$ schon vom $\mathbb{N}$ bekannt ist. Die „6" im Nenner interessiert dabei nicht, da ja beide zu vergleichende Brüche aus 6 Teilen bestehen.
Zweite Möglichkeit des Vergleichs sind Brüche, die im Zähler gleich aber dafür im Nenner verschieden sind.

z. B. $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$

Das dem so ist, wird den Schülern dadurch deutlich gemacht, das man die Brüche wieder auf das Einführungsbeispiel mit Rechtecken zurückführt. Denn ob ich von



oder

etwas, dass in 4 Teile geteilt

dem gleichen, dass in 2 Teile geteilt ist macht einen Unterschied. Je mehr Teile ich schließlich insgesamt habe, desto weniger entspricht dem ein Stück des Gesamten.

Schwieriger gestaltet sich der Größenvergleich von zwei Brüchen folgender Art.

$3/7$ und $5/9$

Hier ist auf den ersten Blick kein Vergleich möglich. Deswegen muss / kann man Brüche solcher Art auf einen gemeinsamen Nenner bringen (Hauptnenner)

$\frac{3 \cdot 9}{7 \cdot 9}$ bzw. $\frac{5 \cdot 7}{9 \cdot 7}$

Somit ergeben sich die beiden Brüche

$\frac{27}{63}$ und $\frac{35}{63}$

Nun lässt sich analog zur ~~ersten~~ 1. Möglichkeit sagen, dass $\frac{27}{63} < \frac{35}{63}$ und

damit $\frac{3}{7} < \frac{5}{9}$ ist.

Auch bietet es sich bei manchen Brüchen an, zu schauen, ob ein Bruch evtl. in einen gemischten Bruch umgewandelt werden kann.

z. B. $\frac{7}{3}$ und $\frac{6}{5}$

$\Rightarrow$ $2\frac{1}{3}$ und $1\frac{1}{5}$

Da $2 > 1$ schon aus den natürlichen Zahlen bekannt ist, kann man daraus rasch folgern, dass $2\frac{1}{3} > 1\frac{1}{5}$

und damit $\frac{7}{3} > \frac{6}{5}$ ist

Schwieriger gestaltet sich dies ~~dann~~ allerdings dann, wenn die Ganzen bei beiden Brüchen gleich sind.
z. B. $\frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$ und $\frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$.
In solchen Fällen ist es sinnvoll, womöglich sofort den Hauptnenner zu bilden.
Eine andere Möglichkeit um Brüche zu vergleichen, läge darin, die Brüche zu beseitigen und damit die natürlichen Zahlen zu vergleichen.

z. B. $\frac{7}{3}$ und $\frac{6}{5}$ $\quad /\cdot 3$

$\frac{7}{3}$ und $\frac{6}{5}\cdot 3$ $\quad /\cdot 5$ $\Big\}$ Äquivalenzumf.?

$\frac{7}{3}\cdot 3\cdot 5$ und $\frac{6}{5}\cdot 3\cdot 5$ ausrechnen

35 und 18

$35 > 18$

$\Rightarrow \frac{7}{3} > \frac{6}{5}$

Jedoch ist solch ein Vorgehen eher kritisch zu betrachten, da die gewonnenen Zahlen eher wenig auf die zugrundeliegenden Brüche schließen lassen.
Abschließen möchte ich den Vergleich von Brüchen damit, dass man die Brüche auch in Dezimalbrüche umwandeln kann. (Taschenrechner oder schriftliche Division)
Nun kann man zwei Dezimalbrüche miteinander vergleichen.
z.B. $1/18 = 0.05\underline{5}\overline{55}$
und $2/37 = 0.05\underline{4}\overline{054}$
Dabei muss man den Schüler erklären, ~~dass sie sich~~, falls sie sich für diese Methode entscheiden, wie sie vorzugehen haben.
Zehntel vergleichen mit Zehntel, Hunderstel mit Hunderstel, ...
Sobald an einer Stelle zwei unterschiedliche Ziffern auftreten (im Beispiel Tausendstel) schaut man, welche Ziffer größer als die andere ist. $5 > 4 \Rightarrow 1/18 > 2/37$.
Für welche Methode sich man letztlich entscheidet, ist Geschmackssache. Der

Lehrer sollte den Schülern jedoch alle Möglichkeiten aufzeigen, da sich aufgrund der Individualität der Schüler versch. Präferenzen ergeben.
Der eine Schüler tut sich mit der einen Methode leichter, ein zweiter mit einer anderen, usw.

Aufgabe 3

In den Vorstunden haben die Schüler bereits Erfahrung in der Addition / Subtraktion und Multiplikation von Brüchen ~~[illegible]~~ gesammelt.
Sie wissen, dass man bei Addition & Subtraktion zwei ungleichnamige Brüche ~~[illegible]~~ auf den Hauptnenner bringen muss und anschließend die Zähler addiert bzw. subtr. und
bei der Multiplikation Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.
Thema dieser Stunde soll nun nun sein, dass die Schüler lernen, wie man einen Bruch ~~mit~~ durch einen zweiten Bruch dividiert.

Einstieg

Zum Stundeneinstieg werden altbekannte Rechenoperationen an Brüchen wiederholt. z.B.

$\frac{1}{5} + \frac{1}{8}$, $\frac{9}{3} - \frac{7}{10}$, $\frac{1}{9} \cdot \frac{3}{8}$, $\frac{10}{5} \cdot 7$, ...

In welcher Form dies geschieht, ist egal. Entweder werden die Aufgaben an die Tafel geschrieben und jeder Schüler rechnet sie auf einem Blatt, tauscht sie anschließend zur Korrektur mit seinem Banknachbarn oder ruft die Aufgaben der Lehrer zu & der schnellste meldet sich

Dadurch wurde das alte Wissen wieder in die Köpfe geholt. Somit können die neuen Erkenntnisse an das Vorwissen anknüpfen.

Verlauf

Der Lehrer konfrontiert die Schüler mit dem Problem $\frac{1}{2} \cdot 4$

Durch nachhaken werden die Schüler darauf kommen, dass $\boxed{:}$ ja letztlich nichts anderes bedeutet als ein Bruchstrich.

Falls nicht, kann der Lehrer das ganze anschaulich vorführen.

bringt einen halben Liter Milch mit und stellt die Aufgabe, diesen auf 4 Gläser gleichmäßig zu verteilen. Anschließend lässt er mit einem Messbecher nachmessen, dass nun in jedem Glas $1/8$ Liter drin ist.
Somit ergibt sich
$1/2 : 4 = 1/8$.
Anhand dieses Bsp. werden die Schüler erkennen, dass $\frac{a}{b} : c$ $\left(\begin{smallmatrix} c \in \mathbb{N} \\ b \neq 0 \end{smallmatrix}\right)$ nichts anderes bedeutet, als $\frac{a}{b \cdot c}$.
Nachdem zu diesem Aufgabentyp einige Aufgaben gerechnet wurden, wird der Schwierigkeitsgrad erhöht.
z. B.

$$\left(\frac{5}{7}\right) : \left(\frac{8}{5}\right)$$

Die Schüler sollen versuchen auch diese Aufgabe zu lösen.
Im ersten Moment wird es den Schüler schwierig erscheinen. Daher liegt es am Lehrer, die Schüler auf das eben gelernte ~~vorz~~ hinzuweisen.
$\frac{5}{7} : a$ $a \in \mathbb{N}$ können sie ja bereits rechnen.
Es wäre somit nötig, den Bruch $8/5$ auf eine ganze Zahl zu bringen.

Da dies meiner Meinung nach für Schüler eigenständig zu erarbeiten schwierig erscheint, sollte das durch einen Lehrervortrag erfolgen, etwa in der Form.

$$\left(\frac{5}{7}\right) : \underbrace{\left(\frac{8}{5}\right)}$$

um den Bruch zu beseitigen mit 5 multiplizieren.
Damit aber die Gleichung nicht verfälscht wird, muss auch der vordere Term mit 5 multipliziert werden.

$$\left(\frac{5}{7} \cdot 5\right) : \left(\frac{8}{5} \cdot 5\right)$$

Im zweiten Term lässt sich die 5 kürzen, so dass nur noch eine natürliche Zahl übrig bleibt. Wie das nun funktioniert, wissen die Schüler durch das Gelernte am Stundenanfang selbst.

$$\left(\frac{5 \cdot 5}{7}\right) : 8$$

$$= \left(\frac{5 \cdot 5}{7 \cdot 8}\right)$$

Hier sollen die Schüler darauf hingewiesen werden, vorerst absichtlich das Ergebnis nicht auszumultiplizieren.

Vielmehr wird das Ausgangsproblem dem Lösungsterm gegenübergestellt.

$$\left(\frac{5}{7}\right) : \left(\frac{8}{5}\right) = \left(\frac{5 \cdot 5}{7 \cdot 8}\right)$$

Dadurch werden die Schüler die Regel erkennen.
Bruch: Bruch heißt, den Bruch mit seinem Kehrbruch zu multiplizieren. ~~(Voraussetzung dabei ist, dass die Schüler~~ Es wird vorausgesetzt, dass die Schüler bereits von Bruch & Kehrbruch bzw. Bruchwert & Kehrwert gehört haben.
Die eigentliche Erarbeitung, Einführung wird mit einem Hefteintrag enden.
Anschließend sollen die Schüler anhand von Aufgaben ihr neu gewonnenes Wissen vertiefen. Dies kann mit einem Arbeitsblatt geschehen.

Aufgabe 1

Typ von Bruch : Bruch

$\frac{5}{3} : \frac{8}{9}$

Aufgabe 2

vermischte Übungen $\frac{5}{3} : 9$, $\frac{8}{3} \cdot 7$,

$$\frac{9}{12} \cdot \frac{10}{8}$$

Damit soll sichergestellt werden, dass die Schüler jetzt nicht blindlings überall die Regel „Bruch mal Kehrwert“ anwenden.
Sollte es sich um eine Doppelstunde handeln, könnte man in der zweiten Stunde Dezimalbrüche durch Dezimalbrüche teilen lassen.
Dies bietet sich ~~sicher~~ u.a. deswegen an, weil die Schüler hier feststellen werden, dass echte / unechte Brüche gg. Dezimalbrüchen auch durchaus ihre Vorzüge haben. Denn wie ich schon jetzt aus meiner Nachhilfe~~zeit~~tätigkeit weiß, arbeiten Schüler äußerst ungern mit Brüchen.
Zum Abschluß der Stunde ist es wichtig, eine Hausaufgabe zu stellen, damit die Schüler ihr Wissen festigen können.