Aufgabe 1

Zunachst soll der Begriff „quadratische Funktion" definiert werden: Eine Funktion $y = ax^2 + bx + c$ wird quadratische Funktion genannt, mit $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Die dazugehörigen Graphen nennt man Parabel.

Die Form $y = ax^2 + bx + c$ nennt man Normalform einer quadratischen Funktion. Durch quadratische Ergänzung kann die Normalform in die Scheitelpunktform: $y = a(x - x_S)^2 + y_S$ überführt werden. Der Vorteil hier ist, dass der Scheitelpunkt S mit $S(x_S / y_S)$ sofort abgelesen werden kann.

Quadr. Ergänzung:

$$ax^2 + bx + c =$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{a2}\right)^2 - \left(\frac{b}{a2}\right)^2\right) + c$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{ab^2}{a^2 4} + c\right)$$

$$\Rightarrow S\left(\frac{-b}{2a} \,\middle|\, -\frac{b^2}{a4} + c\right)$$

mit $\frac{-b}{2a} = x_S$ ; $y_S = \frac{-b^2}{4a} + c$

Bsp.:

$$2x^2 + 6x + 3 =$$

$$= 2(x^2 + 3x + (1{,}5)^2 - (1{,}5)^2) + 3 =$$

$$= 2(x + 1{,}5)^2 - 4{,}5 + 3$$

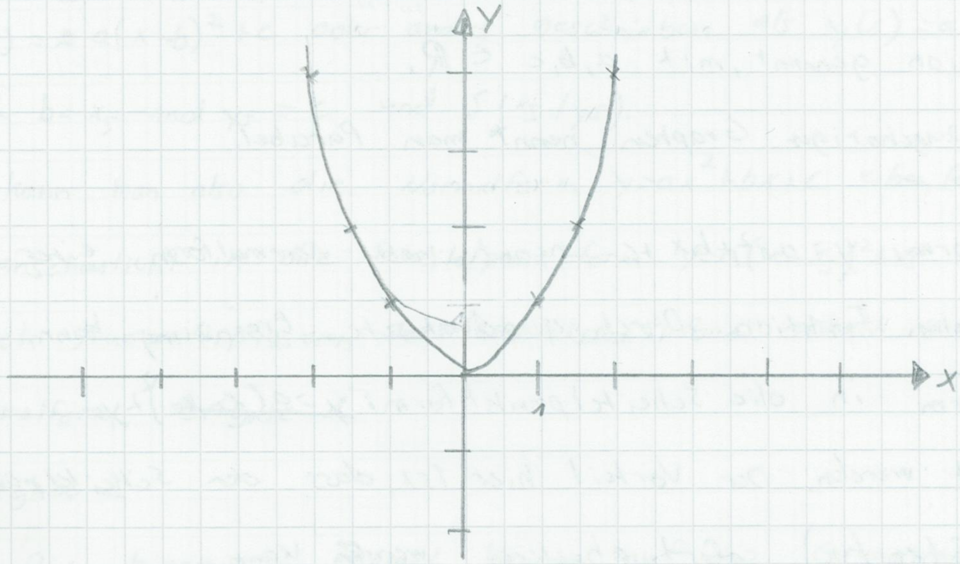
$$= 2(x + 1{,}5)^2 - 1{,}5$$

$$\Rightarrow S(-1{,}5 \,|\, -1{,}5)$$

Die Parabelgleichung der Form $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ ergibt sich durch die Anwendung des Satzes von Vieta. Mit $x = x_1$ und $x = x_2$ sind die beiden x-Werte der Nullstellen (NS) der Parabel gemeint, mit $NS_1(x_1 / 0)$ und $NS_2(x_2 / 0)$. Die Nullstellen der Parabel sind sind Schnittstellen der Parabel mit der x-Achse.

Die Bedeutung der Parameter a, ~~a~~ b, c wird nun erläutert:

Man geht von der Normalparabel $y = x^2$ aus:

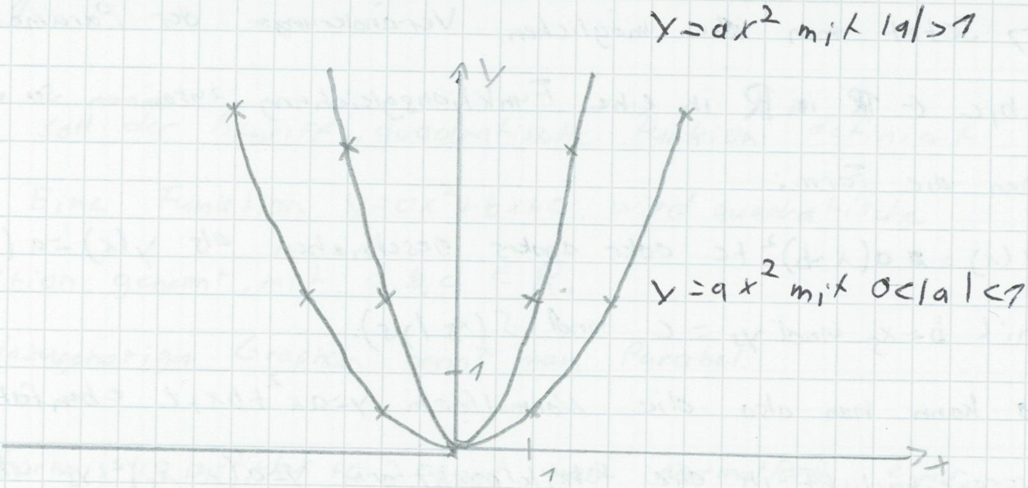



Bei der Normalparabel liegt der Scheitelpunkt S im Ursprung:

$S(0|0)$, mit $y = ax^2$ und $a = 1$

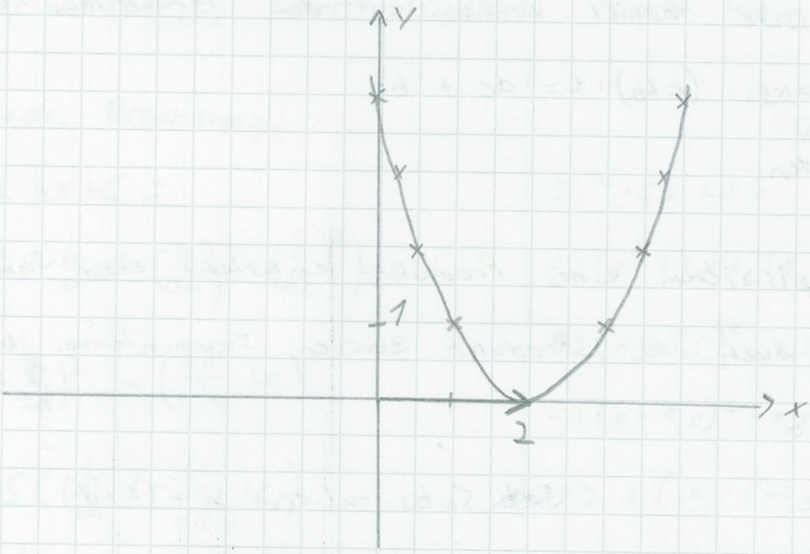
Die Normalparabel kann nun durch die Parameter a, b, c wie folgt verändert werden:

* a entspricht dabei dem Streckungs- oder Stauchungsfaktor und zeigt wohin die Parabel geöffnet ist:
  - $|a| > 1$: Streckung der Parabel
  - $0 < |a| < 1$: Streckung der Parabel
  - $a > 0$ die Parabel ist nach oben geöffnet
  - $a < 0$ -"- unten -"-



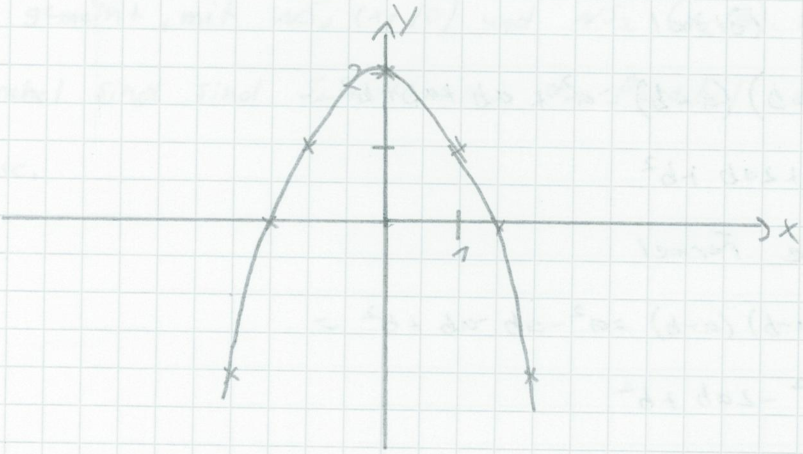

x b verändert mit $y=a(x-b)^2$ zusätzlich und verschiebt den Scheitel der Parabel in x-Richtung um b;

z.B. $y=1\cdot(x-2)^2$




* Eine Veränderung des Parameters C verschiebt den Scheitelpunkt der Parabel in y-Richtung

z.B. $y=-x^2+2$



$\Rightarrow$ Setzt man die möglichen Veränderungen der Parameter $a, b, c \in \mathbb{R}$ in eine Funktionsgleichung zusammen so erhält man die Form:

$y(x) = a(x-b)^2 + c$ oder anders geschrieben als $y(x) = a(x-x_S)^2 + y_S$ mit $b = x_S$ und $y_S = c$ und $S(x_S / y_S)$.

So kann man also die Normalform $y = ax^2 + bx + c$ ebenfalls veranschaulicht in die Scheitelpunktform $y = a(x-x_S)^2 + y_S$ überführen. Durch Ausmultiplizieren der Scheitelpunktform erhält man die Normalform. ~~Aufgabe 2~~

Aufgabe 2

2a) Die binomische Formel können auf der Grundlage des Distributivgesetzes: $(a+b) \cdot c = ac + bc$ hergeleitet werden.

Durch Ausmultiplizieren eines Produkts entsteht eine Summe. So kann man auch das Produkt zweier Summenterme berechnen:

$(a+b)(c+d) =$

$= (a+b) \cdot K$ Subsitution: $K = (c+d)$

$= a \cdot K + b \cdot K$

$= a(c+d) + b(c+d)$ Resubstitution

$= ac + ad + bc + bd$

So kann man nun auch die binomischen Formel herleiten:

1. binomische Formel

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 =$

$= a^2 + 2ab + b^2$

2. binomische Formel

$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 =$

$= a^2 - 2ab + b^2$

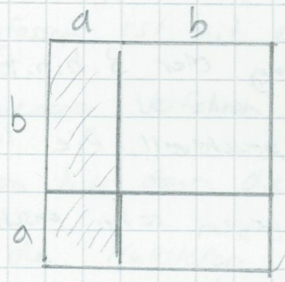
A 3. binomische Formel

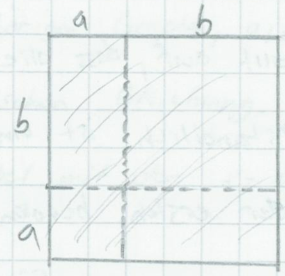
$(a-b)(a+b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2$

So werden bei der Herleitung das Distributivgesetz und anschließend einfaches Zusammenfassen von Termausdrücken verwendet.

Die binomischen Formeln können auch geometrisch veranschaulicht werden.

A 1. bin. Formel:



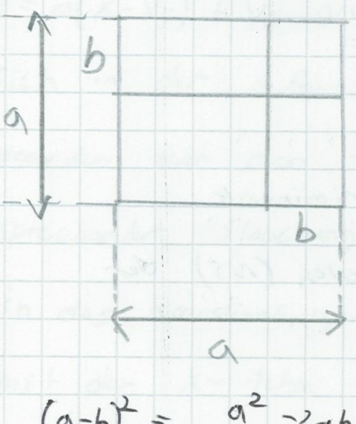



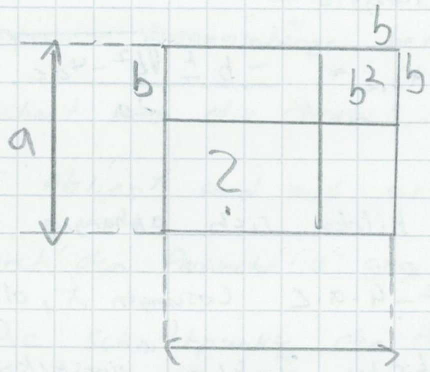

$ab + ab + a^2 + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

2. bin. Formel:

$\cancel{(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2}$

$\cancel{= a^2 - 2ab + b^2}$

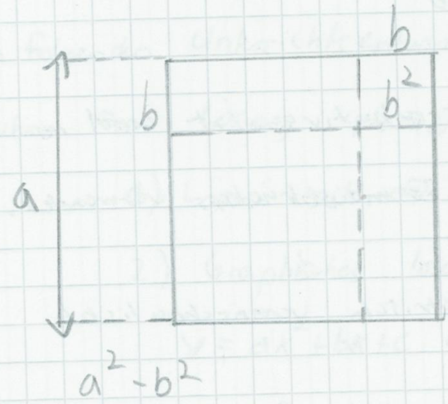


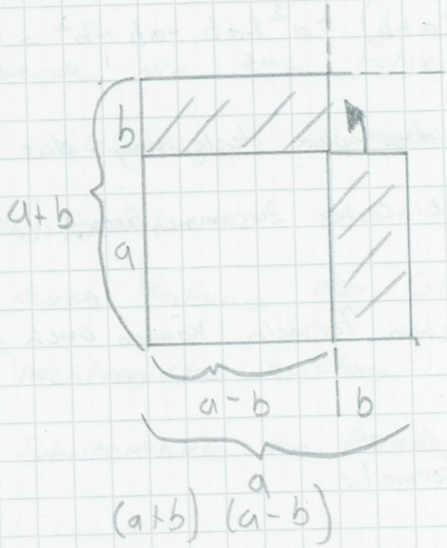




$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = a^2 - ab - ab + b^2$

Von dem großen Quadrat ($a^2$) werden die zwei orangen Flächen ($2 \cdot ab$) abgezogen. Jedoch wird so $b^2$ doppelt abgezogen und muss daher wieder (einmal) addiert werden. So entsteht die gesuchte Fläche (pinke Fläche).

3. bin. Formel




Hierbei fällt auf, dass die geometr. Veranschaulichung der 3. bin. formel sehr umständlich ist und für schüler sehr anspruchsvoll. Die Herleitung der ersten beiden bin. Formel sind hingegen sehr anschaulich und eignen sich gut für die Schüler.

2 b) Zunächst wird die Lösungsformel für quadratische Gleichungen näher erklärt und aufgezeigt:

Lösungsformel:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dabei bilden sich abhängig von der Diskriminante $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ Lösungen x, die die Nullstellen (NS) der quadratischen Funktion darstellen.

- $D = b^2 - 4 \cdot ac > 0$ => Es gibt 2 Lösungen für die quadratische Gleichung und somit 2 NS mit $NS_1(x_1|0)$ und $NS_2(x_2|0)$

- $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0$ => Es gibt genau 1 Lösung, bzw. eine Nullstelle mit NS $(x|0)$
- $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c < 0$ => Es gibt keine Lösung, also auch keine Nullstellen im Graphen.

Aufgabe 3

1. Sachstruktur

Da eine quadratische Gleichung immer als eine quadratische Funktion aufzufassen ist mit einer Parabel als dazugehörigen Graphen, gibt es verschiedene Verfahren zum lösen einer quadratischen Gleichung. Lösungen meinen hier dann die Schnittstellen der Parabel mit der x-Achse, also den Nullstellen der Parabel.

$$y = ax^2 + bx + c = 0$$

Das lösen einer quadratischen Gleichung ist durch das Anwenden der Lösungsformel möglich, die genauere Herleitung befindet sich unter den Punkt 2 b). Mann kann eine quadratische Gleichung der Form $y = ax^2 + bx + c$ oder durch Umformung in die Form $y = a(x - x_s)^2 + y_s$ graphisch lösen (genauere Zusammenhänge befinden sich in der Aufgabe 1). So zeichnet man die Parabel, in ~~dem~~ den man den Scheitelpunkt S abliest und mit entsprechender Stauchung/Streckung (durch den Parameter a gegeben) in das Koordinatensystem einträgt. Die Schnittpunkte der Parabel mit der x-Achse ergeben die Lösungen der Gleichung, bzw. die Nullstellen der Funktion.

Auch ist das lösen mit Hilfe des „Satz des Vieta" möglich. Hierbei versuch man die Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ in die Gleichung $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ zu überführen so sind die Nullstellen gleich ablesbar.

## 2. Didaktische Reduktion

Im folgenden Unterrichtsentwurf werden die zwei folgenden Verfahren zur Lösung quadratischer Gleichungen hergenommen:

1) Lösen mit der Lösungsformel

2) Graphisches lösen durch Umformen der Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ und nachträglichen Zeichnen im Kosy zur Ermittlung der Schnittpunkte der Parabel mit der x-Achse.

Das Verfahren mit dem Satz des Vieta tritt hier in den Hintergrund, da die anderen beiden Verfahren gängiger sind.
Der Vorteil beim lösen mit der Lösungsformel ist, dass man sehr schnell zu einer Lösung kommt. Der Nachteil ist jedoch, dass hier die Gefahr des stupiden Einsetzens entsteht, ohne den Vorgang richtig zu verstehen.
Der Vorteil der Graphischen Lösung ist zwar aufwendiger, dafür werden die Lösungen als Schnittstellen der Parabel mit der x-Achse gut veranschaulicht.

## 3. Lernvoraussetzungen

Quadratische Gleichungen werden in der 9. Klasse [10. Klasse] behandelt.
Um die folgende Unterrichtsstunde durchführen zu können, müssen die Schüler folgende Lernvoraussetzungen ~~er~~ erfüllen:

- Die Schüler kennen die binomischen Formeln und können diese anwenden.
- Die Schüler wissen, dass es zu eine quadratischen Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ einen Graphen, die Parabel gibt.

- Die Schüler können die Gleichung $y=ax^2+bx+c$ in die Scheitelpunktform $y=a(x-x_S)^2+y_S$ durch quadr. Ergänzung überführen, und den Scheitelpunkt S ablesen.

4. Lernziele

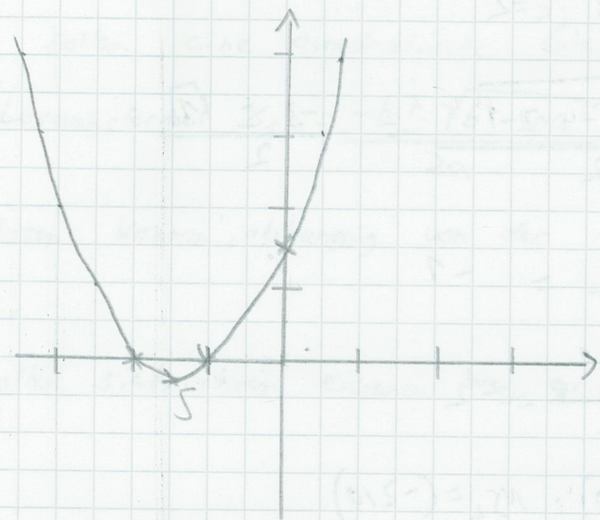
Grobziel: Die Schüler sollen eine quadratische Gleichung lösen können.

Feinziele:

- Die Schüler sollen eine quadratische Gleichung graphisch lösen können, in dem sie die Parabelgleichung in der Normalform $y=ax^2+bx+c$ durch quadratische Ergänzung in die Scheitelpunktform $y=a(x-x_S)^2+y_S$ überführen und anschließend zeichnen, und die Schnittpunkte ablesen.
- Die Schüler sollen eine quadratische Gleichung mit Hilfe der Lösungsformel $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ rechnerisch lösen können, abhängig von der Normalform $y=ax^2+bx+c$.
- Die Schüler sollen sich ihren eigenen Weg suchen.

5. Unterrichtseinheit

| Zeit | Verlauf | Methoden/ Material |
|---|---|---|
| 5 min | <u>Kopfrechenphase</u><br>Wdh.: der 3 bin. Formeln:<br>1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$<br>2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$<br>3. $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$<br>Wdh.: der Scheitelpunktform<br>$y = a(x-x_S)^2 y_S$<br>Wdh.: der Normalform<br>$y = ax^2 + bx + c$ | Kurze EA<br>Zusammenfassen der Ergebnisse an Tafel (mit der Klasse) |
| 2 min | <u>Motivation:</u> Stiller Impuls an Tafel:<br>„$x^2 + 3x + 2 = 0$"<br>„kleiner Bruder brauch Hilfe bei der Hausaufgabe, hat aber nich viel Zeit." | Tafel<br>bunte Kreide |
| | <u>Stundenziel:</u><br>„wir lösen eine quadratische Gleichung"<br>Lehrer: „Wie können wir Basti, meinem kleinen Brude helfen?"<br>SS: „wie alt ist Basti?"<br>„Zeichnen!"<br>„Da kommt „-1" raus!"<br>„wir brauchen den Scheitelpunkt zum zeichnen"<br>„wir müssen quadr. Ergänzen!" | Klassen-diskussion |

| Zeit | Verlauf | Methode Material |
|---|---|---|
| 10 min | **Erarbeitung:**<br>Umwandlung der Gleichung $x^2+3x+2=0$ in die Scheitelpunktform durch quadr. Ergänzung:<br>Lehrer: „Jeder für sich im Heft!"<br>$y = x^2+3x+2$<br>$y = x^2+3x+(1,5^2-(1,5)^2+2 = 0$<br>$y = (x+1,5)^2-\frac{1}{4}$<br>$S(-1,5 \mid -0,25)$<br>„SS": "Jetzt ist das Zeichnen ja einfach!"<br><br>Lehrer: „Was haben wir nun erreicht?<br>Wie bekommen wir ~~m~~ nun die Lsg.?"<br>„SS": Man kann die Schnittpunkte jetzt ablesen!"<br>„SS": "Die Nullstellen sind die Lösungen"<br>"Die Nullstellen sind $NS_1(-1 \mid 0)$ und $NS_2(-2 \mid 0)$" | EA im Heft<br>Lehrer an Tafel<br>⇓<br>Kontrolle<br>Schüler zeichnet an Tafel |

| Zeit | Verlauf | Methoden/ Material |
| --- | --- | --- |
| | Lehrer: „Das hat jetzt aber zu lange für Basti gedauert!" „Wir brauchen einen schnelleren Weg!" | |
| | Erarbeitung einer rechnerischen Lösung zum Vergleich: | An Tafel mit Klasse |

Lösungsformel durch Herleitung mit binomischen Formeln:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

„Zurück zur Anfangsgleichung":

$x^2+3x+2$

$a=1;\ b=3\ ;\ c=2$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2-4\cdot2\cdot1}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-3+1}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{-3-1}{2} = -2$$

$NS_1 = (-1/0)\ ;\ NS_2 = (-2/0)$

Lehrer: „Das gefällt Basti, jetzt kann er sofort Fußball spielen gehen"

Sicherung an Tafel

· Hausaufgabe