Thema Nr. 1

Aufgabe 1

a) Beim Kartesischen Produkt zweier Mengen wird der kombinatorische Aspekt der Multiplikation betrachtet. Das Kartesische Produkt wird auch als Kreuzprodukt bezeichnet.

Unter dem Kreuzprodukt zweier Mengen A und B $(A \times B)$ versteht man die Menge der geordneten Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$.

$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \quad |A \times B| = |A| \cdot |B|$

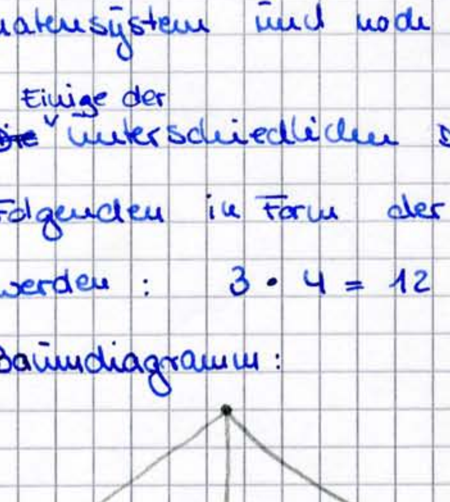
Dabei entspricht die Kardinalzahl des Kreuzproduktes dem Produkt der Kardinalzahlen der Mengen A und B. Somit wird beim Kartesischen Produkt der Kardinalzahlaspekt der Multiplikation zweier Mengen betrachtet.

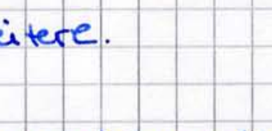
Die Reihenfolge der Elemente $a \in A$ und $b \in B$ spielen dabei eine große Rolle.

Das Kreuzprodukt lässt sich auf unterschiedliche Weise darstellen: zum Beispiel mittels eines Baumdiagramms, einer Tabelle, als Punkte in einem Koordinatensystem und noch viele weitere.

Einige der unterschiedlichen Darstellungsweisen sollen im Folgenden in Form der Aufgabe $3 \cdot 4$ kurz dargestellt werden: $3 \cdot 4 = 12$

Baumdiagramm:





·	a	b	c
d	ad	bd	cd
e	ae	be	ce
f	af	bf	cf
g	ag	bg	cg

$\Rightarrow$ 12 geordnete Paare

Zu der veranschaulichten Aufgabe 3 · 4 sollen nun ~~Beispiele~~: Unterschiedliche Beispiele vorgestellt werden:

- Auf einer Speisekarte gibt es drei Vorspeisen und vier verschiedene Hauptgerichte. Wieviele verschiedene Kombinationsmöglichkeiten von Vorspeise und Hauptgericht gibt es?

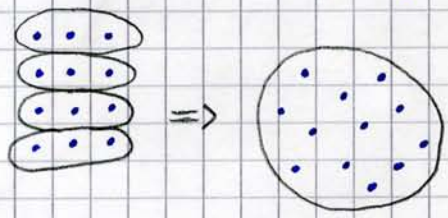
- Susi hat in ihrem Kleiderschrank drei verschiedene Blusen und ~~#~~ Röcke in vier verschiedenen Farben hängen. Sie kann sich nicht entscheiden, was sie sich anziehen soll. Zwischen wie vielen Möglichkeiten muss sie wählen?

- Tom steht im Supermarkt vor dem Nudelregal. Er möchte heute sein Lieblingsessen, Nudeln mit Soße, essen. Im Regal befinden sich drei verschiedene Nudelsorten und Soßen in vier unterschiedlichen Geschmacksrichtungen. Wieviele Tage lang hintereinander könnte er Nudeln mit Soße essen, wenn er ~~[illegible]~~ jedesmal eine andere Kombination wählt?

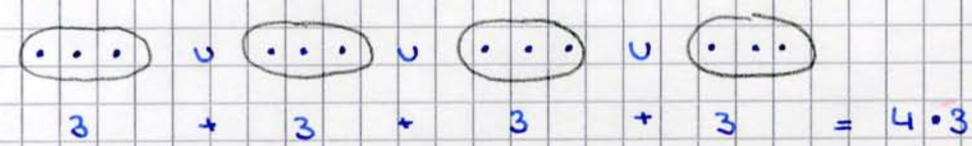
b) Die Multiplikation natürlicher Zahlen kann ~~als~~ im Sinne einer fortgesetzten (wiederholten) Addition verstanden werden.

Dabei handelt es sich um ~~die~~ eine Vereinigung disjunkter äquivalenter Mengen.

Dies soll kurz am Mengenmodell veranschaulicht werden:



oder



Dabei wird 4 als Multiplikator und 3 als Multiplikand bezeichnet. Häufig verwendet man auch die Bezeichnungen 1. Faktor und 2. Faktor. Die Aufgabe 4 · 3 wird als Produkt und ihr Ergebnis (= 12) als Produktwert bezeichnet.

Wie schon in Teilaufgabe 1a) erläutert, kann man die Multiplikation auch ~~als~~ aus kombinatorischer Sicht betrachten.

Dabei handelt es sich um die Menge der geordneten Paare $a \in A$ und $b \in B$ zweier Mengen A und B.

(Diese Form der Multiplikation im Sinne des Kreuzproduktes ist jedoch nur für <u>zwei</u> Mengen zulässig.)

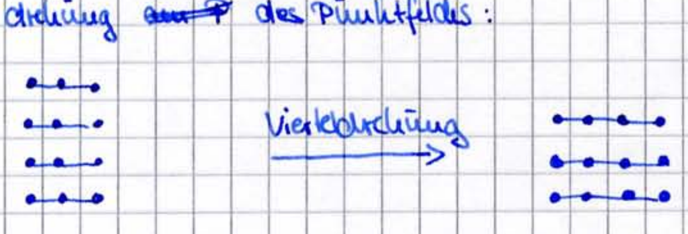
Aufgabe 2

Es gibt mehrere Gesetze, die im Zusammenhang mit der Multiplikation im Unterricht behandelt werden können. Die folgenden Erläuterungen beziehen sich nur auf die Multiplikation natürlicher Zahlen!

- Eines davon ist das Kommutativgesetz. Allgemein sieht dieses Gesetz wie folgt aus: $a \cdot b = b \cdot a$

Dieses Gesetz wird in der Grundschule in Form von Tauschaufgaben angewandt. Das Kommutativgesetz dient vor allem dazu die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Einmaleinsreihen zu verdeutlichen. Auf diese Weise muss nicht das gesamte 1x1 „auswendig" gelernt werden, sondern viele Aufgaben können ~~auf G~~ durch zu Hilfenahme des Kommutativgesetzes selbst hergeleitet werden. Somit bildet es die Basis zum Verständnis der Einmaleinsreihen. Aus diesem Grund muss es eine wichtige Stellung bei der Behandlung der Multiplikation einnehmen.

~~Im~~ Für den Unterricht gibt es vielfältige und sehr unterschiedliche Möglichkeiten das Kommutativgesetz anzuwenden. Veranschaulicht werden kann es am besten durch eine Vierteldrehung ~~auf~~ des Punktfeldes:



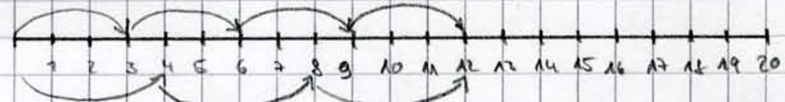
$4 \cdot 3$

Aber auch anhand der 1x1-Tafel oder dem 1x1-Feld lässt sich das Gesetz gut demonstrieren. Ebenso hilfreich kann ~~es~~ auch der Zahlenstrahl sein, bei dem die Multiplikation

?

x^1

zählen" veranschaulicht werden kann:



Dies sollen nur einige von vielen Veranschaulichungsmöglichkeiten ~~für~~ des Kommutativgesetzes sein.

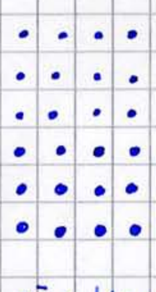
Wie schon erläutert wird es vor allem beim Erarbeiten des multiplikativen Netzes durch die Einmaleinsreihen eingesetzt.

In der 2. Klasse werden die sog. Kernreihen, also die 1, 2, 5, 10er - Reihen automatisiert. Alle anderen sollen durch Anwendung unterschiedlicher ~~Anwendung~~ Gesetze selbst hergeleitet werden. Mit Hilfe des Kommutativgesetzes sind somit schon einmal viele weitere „Aufgaben" der 1x1 Reihe schnell zu lösen. Beherrschen die Kinder z.B. schon die 2er - Reihe, so können sie auch die Tausch-Aufgaben 7 · 2 lösen, ohne die 7er - Reihe ~~gelernt zu haben~~ zu beherrschen.

Ein weiteres wichtiges Gesetz in Bezug auf die Multiplikation ist das Assoziativgesetz: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

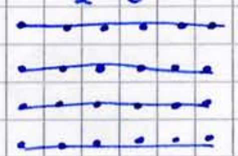
Auch dieses kann den Schülern gut mittels des Punkterasters verdeutlicht werden.

z.B. $4 \cdot 3 \cdot 2$



$4 \cdot 3 \cdot 2 \rightarrow$

$2 \cdot 3$



$\cdot 4$

Ebenso bietet sich zur Veranschaulichung auch wieder der Zahlenstrahl an. Dies soll jedoch nicht demonstriert werden, da ebenso wie beim Kommutativgesetz vorgegangen wird.

Das Assoziativgesetz bietet sich vor allem bei Rechenketten an.

Auf diese Weise ~~wird~~ kann durch geschicktes Zusammenfassen die Rechenkette leichter berechnet werden. Ein Beispiel soll dies verdeutlichen: $(7 \cdot 2) \cdot 5 = 7 \cdot (2 \cdot 5) = 7 \cdot 10 = 70$

Da die Schüler in der Regel die 2er-Reihe wesentlich besser beherrschen als die 7er-Reihe, bietet sich bei derartigen Aufgaben ein ~~Vorgehen~~ vorteilhaftes Rechnen mit dem Assoziativgesetz an. Aber auch beim Lösen von Aufgaben des „großen Einmaleins" kann dieses Gesetz die Aufgabe ~~erleichter~~ vereinfachen:

z.B. $14 \cdot 5 = (7 \cdot 2) \cdot 5 = 7 \cdot (2 \cdot 5) = 7 \cdot 10 = 70$

Derartige „Phänomene" und „Vorgehensweisen" müssen intensiv mit den Schülern geübt werden, damit sie ein Gefühl dafür entwickeln können, wann die Anwendung dieses Gesetzes sinnvoll wäre.

Ebenso wichtig ist auch das Distributivgesetz:

$$a \cdot (b \pm c) = (a \cdot b) \pm (a \cdot c)$$

oder

$$a \pm (b \cdot c) = (a \pm b) \cdot (a \pm c)$$

Auch das Distributivgesetz dient zur besseren Handhabung schwieriger Aufgaben, indem die Aufgaben ~~auf~~ in bekannte und handlichere Aufgaben „umgeformt" werden.

z.B.: $5 \cdot 17 = 5 \cdot (10 + 7) = (5 \cdot 10) + (5 \cdot 7) = 50 + 35 = 85$

Gut veranschaulicht werden kann das Gesetz am Hunderterfeld oder auch im Malkreuz. So verstehen die Kinder, warum auf diese Art verfahren kann. Das Verstehen und Anwenden können des Distributivgesetzes ist eine wichtige Voraussetzung für das halbschriftliche und schriftliche Multiplizieren.

Vor allem durch das halbschriftliche Verfahren des stellenweisen Rechnens das Gesetz gut geübt werden:

$$\begin{array}{l} \underline{35 \cdot 7 = 245} \\ 30 \cdot 7 = 210 \\ \;\;5 \cdot 7 = \;\;35 \end{array}$$

$\Rightarrow 35 \cdot 7 = (30+5) \cdot 7 = (30 \cdot 7) + (5 \cdot 7) = 210 + 35 = 245$

Ein weiteres Gesetz, welches im Zusammenhang mit der Multiplikation auf jeden Fall nicht ~~sesto~~ vernachlässigt werden sollte ist das Gesetz der Konstanz des Produkts

$$a \cdot b = \tfrac{1}{2}a \cdot 2b = 2a \cdot \tfrac{1}{2}b$$

Dieses Gesetz ist wohl eines der am schwierigsten für die Schüler zu verstehenden Vorgehen. Aus diesem Grund muss es sehr gut erklärt und vor allem veranschaulicht werden. Anbieten würde sich auch ~~dt~~ hier das Hunderterfeld.

Das Anwenden dieses Gesetzes ist nur bei bestimmten Aufgaben vorteilhaft. Es sollte vor allem im Zusammenhang mit dem halbschriftlichen Multiplizieren im Unterricht behandelt werden.

Alle ~~aufgelisteten~~ genannten und erklärten Gesetz dienen ~~dann~~ vor allem zum Erschließen des multiplikativen Netzes. Ein richtiges Einsetzen und Anwenden ermöglicht ein schnelleres, vereinfachtes und vorteilhaftes Rechnen. Außerdem können sich die Schüler mit dem Wissen um diese Gesetze viele Aufgaben selber herleiten. Aus diesem Grund ist es äußerst wichtig, all diese Gesetze immer und immer wieder zu verdeutlichen und anzuwenden. Vor allem muss den Schülern ein sicherer Umgang damit beigebracht werden.

Aufgabe 3

Unterrichtseinheit zum Thema „Nachbaraufgaben zu den Kernaufgaben"

· Sachanalyse

Unter Kernaufgaben der Multiplikation versteht man die Einmaleinsreihen von 1, 10, 5, 2 und die Quadratsätze ~~(z.B.~~ (2 · 5 · 6, 4 · 4, 3 · 3, etc.) des kleinen Einmaleins.

Die Nachbaraufgaben ~~von~~ einer Aufgabe können ~~matematisch~~ matematisch wie folgt dargestellt werden: Bsp.: $\begin{matrix} a & b \\ 4 & \cdot 5 \end{matrix}$

1) $a \cdot b = (a+1) \cdot b - 1 \cdot b$ $\quad 4 \cdot 5 = (4+1) \cdot 5 - 1 \cdot 5 = 25 - 5 = 20$

2) $a \cdot b = (a-1) \cdot b + 1 \cdot b$ $\quad 4 \cdot 5 = (4-1) + 1 \cdot 5 = 15 + 5 = 20$

3) $a \cdot b = a(b+1) - 1 \cdot a$ $\quad 4 \cdot 5 = 4 \cdot (5+1) - 1 \cdot 4 = 24 - 4 = 20$

4) $a \cdot b = a(b-1) + 1 \cdot a$ $\quad 4 \cdot 5 = 4 \cdot (5-1) + 1 \cdot 4 = 16 + 4 = 20$

Somit gibt es zu jeder Aufgabe, welche aus einem 1. Faktor und einem 2. Faktor besteht, genau 4 Nachbaraufgaben.

-

Die folgende Unterrichtseinheit ist für die 2. Klasse konzipiert. Sie könnte aber auch zu Beginn der 3. Klasse als Wiederholung der Kernaufgaben und Herleitung der restlichen Einmaleinsreihen eingesetzt werden.

· Lehrplanbezug

~~Aus~~ Mathematik 2. Klasse:

Automatisierung der Kernaufgaben, also der 1er, 10er, 5er und 2er Reihe und der Quadratsätze. Alle anderen Einmaleinsreihen sollen über Tausch-, Verdopplungs- und Nachbaraufgaben hergeleitet werden.

3. Klasse: Wiederholung der automatisierten Kernaufgaben
Automatisierung der restlichen Einmaleinsreihen

• Lernvoraussetzungen für die Unterrichtsstunde

Die 1er, 2er, 5er und 10er Reihe und die Quadratsätze des kleinen Einmaleins sind bereits automatisiert.
Prinzip der Tauschaufgabe ist bereits bekannt ($3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$)

• Ziele der Unterrichtsstunde

Grobziel: Die Schüler sollen anhand der Kernaufgaben der Multiplikation ihre Nachbaraufgaben lösen können.

Feinziele: Die Schüler sollen die vier Nachbaraufgaben einer Aufgabe bestimmen können.
Die Schüler sollen ihre Rechenwege aus den Kernaufgaben ableiten können.

L ≙ Lehrer , SS = Schüler

Zeit	Verlauf	Merkhilfen, Medien
0	~~Hinführung~~ / Aufwärmphase / Einstieg: Kurze Kopfrechenübungen: Eckenlaufen Alle SS stehen in einer Ecke des Klassenzimmers L stellt Schülern Einmaleinsaufgaben der „Kernreihen". Der Schüler, der das Ergebnis zuerst weiß, darf eine Ecke weiterlaufen. Das geht solange, bis der erste Schüler wieder am Startpunkt angekommen ist. (Beispielaufgaben: 2·4, 5·3, 10·7, ...)	
5	1. Phase Hinführung	
	L schreibt die Aufgabe 3·4 an die Tafel	Tafel
	L: „Wer kann die Aufgabe lösen? Erklär wie!" SS lösen die Aufgabe vermutlich im Sinne einer wiederholten Addition (4+4+4=12). L: „Jetzt möchte ich euch einen kleinen „Trick" zeigen, wie man die Aufgabe noch anders lösen kann." (evtl. hat schon ein Schüler erkannt, dass es mit Hilfe der Nachbaraufgaben geht. Er gibt dann diesen Hinweis. Andernfalls übernimmt dies dann die Lehrkraft.) L lässt von den Schülern die Nachbaraufgaben bestimmen. Folgendes Tafelbild entsteht, wobei die Reihenfolge der Nachbaraufgaben je nach Nennung der Kinder variieren kann!	

Zeit	Verlauf	Merkhilfen Medien
	<u>Tafelbild:</u> ~~3 · 4~~ $3 \cdot 4 =$ Nachbaraufgaben $3 \cdot 5$ $3 \cdot 3$ $4 \cdot 4$ $2 \cdot 4$ L gibt SS noch andere Aufgaben, zu denen sie die Nachbaraufgaben finden sollen (z.B. $6 \cdot 7$)	Tafel
15	<u>Vertiefung:</u> All diese Nachbaraufgaben könnt ihr ja schon lösen. L: „Habt ihr eine Idee, wie man ~~die~~ unsere Aufgabe von vorhin $(3 \cdot 4)$ mit Hilfe der Nachbaraufgaben lösen kann?“ SS machen unterschiedliche Vorschläge zum Vorgehen. Da mit relativ großer Sicherheit der richtige Ansatz dabei ist, greift der Lehrer dies auf und verdeutlicht das Vorgehen zuerst an einem Beispiel: $3 \cdot 4 = 4 \cdot 4 - 1 \cdot 4 = 16 - 4 = 12$ ~~Der Rechenweg wird nun gemeinsam am Zahlenstrahl nachvollzogen.~~ L: „Was muss ich mach, wenn ich bei $4 \cdot 4$ beginne?“ L nimmt Zahlenstrahl zu Hilfe und geht $4 \cdot 4$ „Schritte“ vor bis auf die Zahl 16	Zahlenstrahl an Wand im Klassenzimmer

L: „Was muss ich jetzt machen?"

-> 4 Schritte zurück, da ja nur 3 mal 4!

Gemeinsam kommt man zu dem Ergebnis 12.

L demonstriert und erklärt nocheinmal den Rechenweg. Zahlenstrahl

Die Rechnung wird an die Tafel geschrieben.

$3 \cdot 4 = 4 \cdot 4 - 1 \cdot 4 = 16 - 4 = 12$

25 Transfer

~~Dasselbe Verfahr~~ Genauso wird auch mit den drei anderen Neben· Nachbaraufgaben verfahren.

Dabei demonstriert der Lehrer immer wieder den Rechenweg entlang des Zahlenstrahls.

Folgende Rechnungen werden somit hergeleitet:

$3 \cdot 3 = 3 \cdot 4 = 3 \cdot 3 + 1 \cdot 3 = 9 + 3 = 12$

$3 \cdot 5 \quad 3 \cdot 4 = 3 \cdot 5 - 1 \cdot \cancel{5}3 = 15 - 3 = 12$

$2 \cdot 4 \quad 3 \cdot 4 = 2 \cdot 4 + 1 \cdot 4 = 8 + 4 = 12$

Hinweis auf Tauschaufgabe: $3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$!

L: „Wie ihr seht, habt ihr jetzt vier verschiedene Möglichkeiten mit den Einmaleinsreihen, die ihr schon kennt, so eine Aufgabe zu lösen!"

40 ~~35~~ Übung:

L gibt Schülern Arbeitsblatt, auf dem die Aufgaben ebenfalls durch Nachbaraufgaben gelöst werden sollen.

z.B. $6 \cdot 7$, $5 \cdot 6$,

(X) siehe S 13