1.
Es gibt verschiedene Auffassungen von Bruchzahlen, die in unterschiedlichen zur Ausmaß / Anwendung im Unterricht kommen.
Verschiedene Sichtweisen bzw. Aspekte von Bruchzahlen sind:
der Maßzahlaspekt (Brüche als konkrete Brüche / als Größe; 2,8 $\frac{1}{4}$ kg; $\frac{1}{8}$ l; ...); der Verhältnisaspekt (Bruchzahl gibt ein Verhältnis an, wie bsp.weise einen Spielstand 2:3 oder Kartenmaßstab 1:1000; ...)
der Quotientenaspekt (Bruch als Ergebnis/Quotient einer Divisionsaufgabe z.B. $3:5 = \frac{3}{5}$)
Bruch als Lösung einer Gleichung (Bsp. die Lsg. der Gleichung $x \cdot 2 = 7$ ist die Bruchzahl $\frac{7}{2}$);
der Operatoraspekt (Brüche als multiplikative Anweisung, Bsp. $\frac{2}{3}$ von); der Skalenwertaspekt (Brüche gibt Wert auf einer Skala an z.B. Tankskala, oder ähnliches)
den Bruch als Teil eines Ganzen oder als Teil mehrerer Ganzer
(Bsp $\frac{3}{4}$ =

*Alle diese Aspekte kommen in unterschiedlichem Ausmaß im Unterricht zur Geltung, dabei sind sie auch nicht immer voneinander trennbar.
*quasikardinaler Aspekt: $\frac{1}{4} + \frac{3}{4}$ * 1 Viertel + 3 Viertel
Im Folgenden werde ich das Äquivalenzklassenkonzept, das Gleichungskonzept, das Größenkonzept und Operatorkonzept erläutern und deren Unterrichtl. Bedeutung für die Addition (Aufgabe 2) vom Unterricht d. Hauptschule diskutieren.

I. Das Äquivalenzklassenkonzept

In der Menge der geordneten Paare (a,b), natürlicher Zahlen wird eine Relation definiert mit $(a,b) \sim (c,d) :\Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$
Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation

· reflexiv, d.h. $(a,b) \sim (a,b)$

· symmetrisch, d.h. $(a,b) \sim (c,d) = (c,d) \sim (a,b)$

· transitiv, d.h. $(a,b) \sim (c,d)$ und $(c,d) \sim (e,f)$

$\Rightarrow (a,b) \sim (e,f)$

Die Äquivalenzrelation bewirkt eine Klasseneinteilung. Die Bruchzahl ist in diesem Konzept also eine Äquivalenzklasse. Bsp.weise nennt man die Ä.klasse in der das geordnete Paar $(3,4)$ liegt $\frac{3}{4}$. Schreibt man die Äquivalenzklasse in aufsteigender Mengenschreibweise: $\frac{3}{4} = \{\frac{6}{8}; \frac{12}{19}; \ldots\}$

$\frac{6}{8}, \frac{12}{19} \ldots$ sind Vertreter der Äquivalenzklasse/Bruchzahl $\frac{3}{4}$.

Rechenoperationen zwischen den Äquivalenzklassen erfolgen über folgende Festsetzung: (als Bsp. „+" und „·")

$(a,b) + (c,d) := (a \cdot d + c \cdot b, bd)$ Addition zwischen 2 Äqu.-klassen

$(a,b) \cdot (c,d) := (a \cdot b, c \cdot d)$ Multiplikation zw. 2 Klassen

Die Addition ist kommutativ, assoziativ und besitzt ein neutrales Element $(0,1)$.

Die Multiplikation ist kommutativ, assoziativ, distributiv und hat das neutrale Element $(1,1)$ und inverses Element zu (a,b) ist (b,a).

Alle Operationen sind Repräsentantenunabhängig, d.h. egal welcher Vertreter einer Ä.klasse) für eine Rechenoperation genommen wird, führt zum gleichen Ergebnis. Bsp. $\frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{6}{8} + \frac{4}{6} = \frac{9}{12} + \frac{8}{12}$

Die Herleitung der Bruchzahlen mit Hilfe dieses Konzept sowie die Einführung der Addition* ist sehr formal. Die SchülerInnen bekommen keine anschauliche Einführung in das Rechnen mit Bruchzahlen. Demnach kann sich kein anschaulicher Bruchbegriff entwickeln. Es bleibt bei einem ~~Rat~~ Realitätsfremden Verständnis, Rechenregeln werden formal angewendet.

So kann es schnell zu fehlerhaften Rechnen – auch bei einfachen Aufgaben kommen, da das Verständnis fehlt. Demnach ist dieses Konzept für die unterrichtl. Behandlung insgesamt wenig geeignet.

II. Das Gleichungskonzept (Freudenthal)

Die Bruchzahl ist bei diesem Konzept die Lösung einer Gleichung $x \cdot a = b$, (also $\frac{b}{a}$). Diese Gleichung ist in $\mathbb{N}$ nicht lösbar. Man geht nun davon aus, dass $\frac{b}{a}$ die Lösung ist und fragt nach Eigenschaften dieser Zahlen und wie man mit ihnen rechnet. Beispielsweise wird die Multiplikation von $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}$ folgendermaßen gelöst: $x = \frac{2}{3}$ und $y = \frac{1}{4}$

$3 \cdot x = 2 \text{ I}$ und $4 \cdot y = 1 \text{ II}$

$\cancel{x \cdot y = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}}$

$\cancel{(3 \cdot x)(4 \cdot y) = 1 \cdot 2}$ $\qquad (3 \cdot x)(4 \cdot y) = 1 \cdot 2$

$\cancel{3 \cdot x \cdot 4 \cdot y = 1 \cdot 2}$ $\qquad 3 \cdot x \cdot 4 \cdot y = 1 \cdot 2$

$\cancel{12 \cdot (x \cdot y) = 2}$ $\qquad 12(x \cdot y) = 2$

$\cancel{2 = \frac{12}{2}}$ $\qquad xy = \frac{2}{12}$

$\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$

$3x = 2 \text{ I} \qquad 4y = 1 \text{ II}$

$3x + 4y = 1 + 2$

$3x \cdot y = 2 \cdot 4 \text{ I}'$ $\qquad \cancel{\text{I}' + \text{II}' \; 12x + 12}y$

Das Gleichungskonzept setzt Kenntnisse im Rechnen der Gleichungslehre voraus.

In der 5. Klasse beginnt man mit Termumformungen und der Einführung mit Gleichungen. Jedoch ist das Umformen von Gleichungen bei der Behandlung von Brüchen noch nicht soweit

gefestigt, dass damit gerechnet werden kann.
Auch das Gleichungskonzept ist relativ formal und eignet sich für die Addition eher nicht.

III Das Größenkonzept

Hier ist die Bruchzahl eine Größe mit der Maßzahl $\frac{m}{n} \cdot E$ ($m, n \in \mathbb{N}$ und E ist die Einheit)

Bsp. $\frac{1}{4}$ m; $\frac{5}{8}$ l; €; ...

Um mit diesen Größen rechnen zu können, muss man eine gewisse Vorstellung über Größenbereiche haben.
Ein Größenbereich G liegt dann vor, wenn die Menge der Elemente $A, B, C, \ldots$ (Größen) folgende Eigenschaften hat:

- A, B sind Größen also $A, B \in G$, dann gilt $A + B \in G$.
  D.h. die Addition bzgl. G ist eine abgeschlossene Operation
  Bsp. $\frac{1}{2}$ m $+ \frac{1}{2}$ m $= 1$ m
  Gbsp. $\frac{1}{2}$ m $\cdot \frac{1}{2}$ m $= \frac{1}{4}$ m^2
  ↳ Die Multiplikation ist keine abgeschlossene Operation
- es gilt eine Relation mit $A, B \in G$
  entweder $A > B$
  oder $A < B$ Bsp. 1 m > 3 m, 3 m > 1 m
  oder $A = B$
  diese Relation nennt man Trichotomie
- die Rechenoperation „+" ist kommutativ $A + B = B + A$
  Bsp. $\frac{1}{2}$ m $+ \frac{1}{4}$ m $= \frac{1}{4}$ m $+ \frac{1}{2}$ m
- sie ist außerdem assoziativ, also $(A + B) + = A + (B + C)$
  Bsp. $\frac{1}{2}$ m $+ \left(\frac{1}{4}\text{ m} + \frac{1}{3}\text{ m}\right) = \left(\frac{1}{2}\text{ m} + \frac{1}{4}\text{ m} +\right) \frac{1}{3}$ m

- Es gibt eine Lösung für die Gleichung

$n \cdot x = A$ (mit $n \in \mathbb{N}$; x und $A \in G$)

$x = \frac{A}{n}$

Die Bruchzahl ist hier also ein sogenannter konkreter Bruch $\frac{m}{n} A$ und kann auch $m \cdot (\frac{1}{n} A)$ oder $\frac{1}{n} \cdot (m \cdot A)$ geschrieben und aufgefasst werden.

Bsp. $\frac{3}{4}$ m kann auch gesehen werden als $3 \cdot \frac{1}{4}$ m oder als $\frac{1}{4} \cdot 3$

$\frac{1}{4}$ → also von 3m 1 Viertel nehmen

also $(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4})$ m

~~Diese Bruchzahlen kann~~

Größen kann man vervielfachen, durch

$n \cdot A =: \underbrace{A + A + A + \ldots}_{n}$ (mit $n \in \mathbb{N}$ und $A \in G$)

Bsp. $3 \cdot \frac{4}{5}$ m $= \frac{4}{5}$ m $+ \frac{4}{5}$ m $+ \frac{4}{5}$ m $= \frac{12}{5}$ m

Größenbereiche haben die Teilbarkeitseigenschaft $n \cdot x = A$

Kommensurabilität:

2 Größen A, B sind kommensurabel, wenn gilt:

$A = m \cdot E$

$B = n \cdot E$

n, m sind natürliche Zahlen, E ist die Einheit

Das Größenkonzept ist vor allem für den Einstieg in das Rechnen bzw. die Addition von Brüchen sehr wichtig, da ein hoher Alltagsbezug besteht. Die Schüler kennen gebrochene Zahlen in Verbindung mit Größen schon vorher, kennen evtl. auch schon einfache Brüche wie $\frac{1}{4}$ l = 250 ml o. Ä.

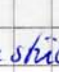
Demnach kann man hier an die Alltagserfahrung der Schüler/innen anknüpfen und so einen anschaulichen Bruchzahlbegriff entwickeln.

Dennoch hat auch dieses Konzept seine Grenzen. Für die Einführung von Brüchen also mit Hilfe konkreter Brüche und für die Addition einfacher Brüche ist dieses Konzept gut geeignet, besonders, um Schüler zu motivieren.

~~Für das Rechnen mit schwierigeren Brüchen sowie die Multiplikation und Division ist es jedoch weniger geeignet~~

Padbergs Untersuchungen haben gezeigt, dass Schüler/innen, die lange mit konkreten Brüchen rechneten weniger Fehlerstrategieentwicklung hatten als welche, die schon frühzeitig zur formalen Schreibweise übergingen.

Die Addition wird mit diesem Konzept folgendermaßen eingeführt:

Man „rechnet" Pizzastücke , Literangaben, Meterstücke o.ä. zusammen.

Erst auf ikonische Ebene

z.B. $\frac{1}{4} l + \frac{1}{4} l$ 

dann geht man über auf die symbolische Ebene. Dabei werden konkrete Brüche in die nächst kleinere Einheit überführt. Bsp $\frac{1}{2} m + \frac{1}{4} m = 500 cm + 250 cm = 750 cm$

$= \frac{3}{4}$

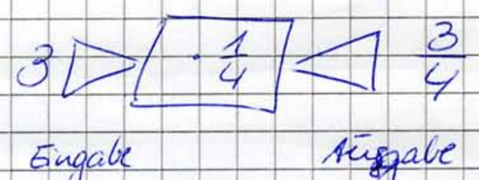
IV Operatorkonzept

Bruchzahlen werden hier als Operatoren gesehen. Also als Funktionen, die einer Zahl eine andere zuordnen

Bsp. $3 \xrightarrow{:\frac{1}{4}} \frac{3}{4}$

In der Schule wird oft der Operator als eine Art Maschine gesehen: ~~dort wird etwas eingegeben~~

Bsp.



Eine 2. Form des Operatorkonzept ist die Hintereinanderschaltung eines Multiplikations- und eines Divisionsoperators wodurch der Bruchoperator entsteht.

$(\cdot m) \circ (: n) = \frac{m}{n}$

Das Erweitern und Kürzen ist demnach das Einbringen bzw. Weglassen überflüssiger Operatorpaaren.

$$\frac{6}{8} = (\cdot 6) \circ (: 8) = (\cdot 2)(\cdot 3) \circ (: 2)(: 2)(: 2)$$
$$= (\cdot 3) \circ (: 2)(: 2)$$
$$= \frac{3}{4}$$

Das Operatorkonzept war in den 70er/80er Jahren weit verbreitet. Heute bezieht man eher andere Konzepte ein, da das Operatorkonzept einen höheren Zeitaufwand benötigt und dies laut Padberg nicht gerechtfertigt ist.

Wenn man die Operatoren nicht als Maschinen darstellt, ist auch dieses Konzept sehr formal und eher alltagsfern.

Die Multiplikation, Division und das Erweitern bzw. Kürzen lässt sich mit diesem Konzept gut einführen.

zur Einführung der Add. ist es ungeeignet.

Bei diesem Konzept wird mit der Multiplikation begonnen.

4.

Gleichungen wie $3 \cdot x = 5$ sind in der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ und auch in der Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ nicht lösbar. Deshalb braucht man eine Zahlenbereichserweiterung auf $\mathbb{Q}$

Siehe Äquivalenzklassenkonzept Aufgabe 1

die gegebene Relation ist eine Äquivalenzrelation; also ist sie - reflexiv, d.h. $(a,b) \sim (a,b)$

denn 1) $a \cdot b = b \cdot a$

2) $a \cdot b = a \cdot b$ (1; Kommutativgesetz)

Bsp $(3,4) \sim (3,4)$, denn $3 \cdot 4 = 3 \cdot 4$

- symmetrisch, d.h. wenn $(a,b) \sim (c,d)$

dann $(c,d) \sim (a,b)$

1) $(a,b) \sim (c,d)$ (Voraussetzung)

2) $a \cdot d = b \cdot c$ (1; Def.)

3) $b \cdot c = a \cdot d$ (Eigenschaft von „=“; 2)

4) $c \cdot b = d \cdot a$ (Komm.; 3)

5) $(c,d) \sim (a,b)$ (Def; 4; Behauptung)

Bsp. $(3,4) \sim (6,8)$

$(6,8) \sim (3,4)$

- transitiv, d.h. wenn $(a,b) \sim (c,d)$ und $(c,d) \sim (e,f)$

dann $(a,b) \sim (e,f)$

1) $(a,b) \sim (c,d)$ | Voraussetzg.
$(c,d) \sim (e,f)$

2) $a \cdot d = b \cdot c$ und $c \cdot f = d \cdot e$ (1; Def.)

3) $c = \frac{a \cdot d}{b}$ (I) (2; elem. Rechnen)

4) $\frac{a \cdot d}{b} \cdot f = d \cdot e$ (Einsetzen I in 2)

5) $a \cdot d \cdot f = d \cdot e \cdot b$ (auf beiden Seiten; 4)

6) $a \cdot f = e \cdot b$ (5; : d)

7) $a \cdot f = b \cdot e$ (Komm., 6,)

8) $(a,b) \sim (e,f)$ (Def. Behaupt.)

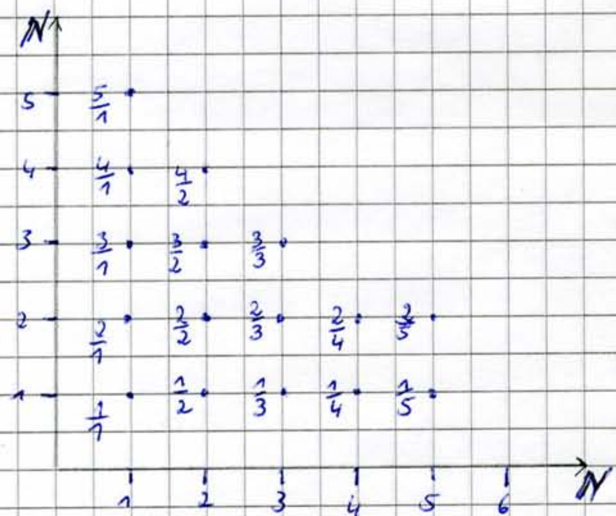
Aus der Zahlenbereichserweiterung ergibt sich die Frage nach der Mächtigkeit von $\mathbb{Q}$

Ist $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$

oder $|\mathbb{Q}| > |\mathbb{N}|$?

Nach Cantor haben 2 Mengen die gleiche Mächtigkeit, wenn es eine 1 zu 1 Zuordnung gibt.

Mit dem 1. Cantorschen Diagonalverfahren kann zeigen, dass $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^2$ $\quad |\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$



③

1. Thema der Stunde:

Übungsstunde zur Addition von Brüchen

2. Lehrplan: 6. Klasse

3. Didaktische Analyse

3.1 Sachverhalt

Die Regel für die Addition zweier Brüche ist „man addiert 2 ungleichnamige Brüche $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$, indem man den Hauptnenner bildet $b \cdot d$ und a mit d erweitert und c mit b.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$$

„man addiert 2 gleichnamige Brüche $\frac{a}{b} + \frac{c}{b}$, indem man die Zähler addiert und den Nenner beibehält.

Größenvergleich:

- Ein echter Bruch $\frac{a}{b}$ ist umso größer, je kleiner der Nenner ist.

Bsp. $\frac{1}{2} > \frac{1}{4} > \frac{1}{8} > \frac{1}{16}$

- Ein (unechter) Bruch mit gleichen Nennern ist umso größer, je größer der Zähler ist. Bsp. $\frac{3}{5} > \frac{1}{5}$ ~~oder~~
- Ein Bruch ist umso größer, je größer der Zähler und je kleiner der Nenner

3.2 Bedeutung der Addition von Brüchen für ...

3.1 Alltag, Zukunft, Beruf

Die Schüler kennen Brüche aus ihrem Alltag und müssen mit Brüchen umgehen können. Gerade fürs Berufsleben ist das Rechnen mit Brüchen / konkreten Brüchen sehr wichtig. Besonders bei handwerklichen Berufen wie Schreiner oder Bäckern.

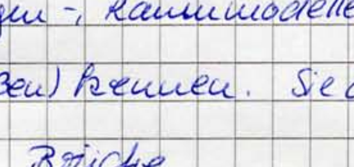
3.2 Innermathematische Bedeutung

Die Behandlung von Brüchen ist wichtig für die spätere Behandlung von ~~D~~ Dezimalbrüchen und Prozent.
Hier wird immer wieder auf die Bruchrechnung und deren Rechenoperationen zurückgegriffen, um ein anschauliches und vernetztes Verständnis von ~~G~~ gebrochenen Zahlen zu gewährleisten.
Brüche sind außerdem die ~~natürliche~~ Erweiterung der natürlichen Zahlen. So können Aufgaben gelöst werden, die in N nicht lösbar waren.

3.3 Vorwissen der Schüler/innen

Die Einführung der Bruchzahlen beginnt in der 5. Klasse. Dort lernen die Schüler Brüche an ver. Modellen (Flächen-, Kreis-, Mengen-, Raummodellen) und als konkrete Brüche (Größen) kennen. Sie addieren gleichnamige konkrete Brüche.
In der 6. Klasse lernen die Schüler anhand anschaulicher enaktiver u. ikonischer Beispiele, das Erweitern u. Kürzen von Brüchen. Sie vergleichen Brüche am Zahlenstrahl und ordnen sie nach ihrer Größe.
Die Addition wird meist in 2 Stufen eingeführt: Erst die Addition gleichnamiger Brüche meist mit Hilfe von Größen und dem quasikardinalen Aspekt.
Danach werden gleichnamige Brüche eingeführt z.B. mit Hilfe folgender ~~Auf~~ Aufgabe

Tom isst $\frac{1}{4}$ der Pizza
Jan " $\frac{1}{2}$ " "



Wieviel ist übrig?  $\frac{6}{8}$

3.4 Fehler bei der Addition

mögliche Fehler ~~können~~ wie z. B

a) $\frac{3}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3+1}{4+3}$

können auftreten wenn die Multiplikation 2er Brüche vorher eingeführt würde und so ein fehlerhafter Transfer geschieht. ~~Der~~ Die Addition muss sehr anschaulich erarbeitet werden und darf nicht zu früh ins formale Rechnen übergehen.

b) $n = \mathbb{N}$

$n + \frac{1}{4} = \frac{n}{n} + \frac{1}{4}$ oder ähnliches

Grund dafür ist, dass die natürl. Zahlen nicht im Verständnis der Bruchzahlen eingebettet sind. Durch Einbeziehen von Aufgaben mit natürlichen Zahlen kann dieser Fehler vermieden werden.

c) Weitere Fehler können sich auf das Bilden des Hauptnenners beziehen beim Größenvergleich, o.ä.

*

Bsp. Addition zwischen Äquivalenzklassen $(a,b)+(c,d) = (a \cdot d + c \cdot b,\ b \cdot d)$

Die Addition wird über obige formale Festsetzung eingeführt und als Regel angewendet.

Bsp. $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} =$

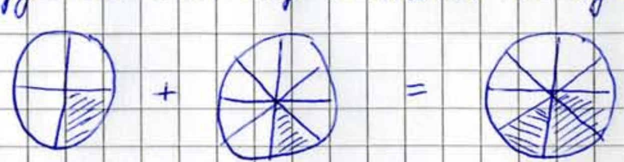
$$(3,4) + (1,2) = (3 \cdot 2 + 4 \cdot 1,\ 4 \cdot 2)$$

Diese Einführg. ist rein formal, unanschaulich und kann zur systematischen Fehlerentwicklung führen.

Ziele:

Die Schüler sollen eine anschauliche Vorstellung von der Addition von 2er Bruchzahlen bekommen und bisherige Kenntnisse zur Addition mit Hilfe von Variation der Aufgaben, Umkehraufgaben, Zerlegen in Teilschritte,... vertiefen.

- Die Schüler sollen das Vergleichen von Brüchen wiederholen und feststellen, dass umso größer der Zähler und umso kleiner der Nenner, desto größer der Bruch
- Die Schüler sollen durch Ausprobieren auf eine möglichst große Summe zweier Brüche finden
-

Artikulation/ Phasen		Medien
Kontrolle der Hausaufgabe/ WH	- als HA hatten die Schüler Aufgaben zur Addition von ungl. Brüchen Alle Aufgaben sind auf ikonischer u. sym. Ebene zu lösen z.B  $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$ oder  $\frac{1}{3} + \frac{2}{4} = \frac{10}{12}$ oder male entspr. Kreise, Rechtecke o.ä. zu $\frac{3}{5} + \frac{1}{4}$	OHP zur Kontrolle
Übungsphase	Jede/r Schüler/in bekommt Zahlenkarten 1, 3, 4, 5, 7 und ein AB mit folgenden Aufträgen: 1. Ordne die Zahlen nach ihrer Größe 2. Bilde aus diesen Zahlen möglichst viele Brüche 3. Ordne die gebildeten Brüche nach ihrer Größe und veranschauliche die Brüche mit einem Bild.	Einzelarbeit → jeder Sch. soll selbstständig auf die Lsg. kommen um in der nächsten Phase die Einsicht vertiefen zu können

	4. Suche aus deinen gebildeten Brüchen die 2, die zusammen die größte Summe bilden	
	<u>Anschließend gemeinsame Kontrolle</u>	
	Um die Addition zu festigen, wird ein Spiel gemacht: Hierbei gibt es 2 Kartenstapel. Auf den Karten des 1. sind Aufträge z.B. $\boxed{\triangle + \circ}$ o.ä. auf den Karten d. 2. Stapels sind Zahlen / Brüche z.B. $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{3}$ $\boxed{\frac{5}{8}}$ o.ä. Jeder Sch. zieht eine Karte und einer zieht eine Auftragskarte für alle.	Kleingruppen von 3 bis 5 Personen
	Die/Der das Ergebnis mit dem höchsten Bruch hat, gewinnt die Runde....	
Hausaufgabe - Besprechen - Verständnisfragen klären,...	Aufgaben bsp. ähnliche Aufgaben wie oben, außerdem noch Platzhalteraufgaben $\frac{1}{4} + \square = \frac{3}{4}$ -> alles auf ikonischer u. symbolischer Ebene! -> Umkehraufgaben, Variationen d. Zahlen,... -> Bsp. Rechenpyramiden ⟶