①

1) Es gibt vier verschiedene Auffassungen von Brüchen. Man kann also auf die Frage „Was ist ein Bruch?" auf vier verschiedene Weisen antworten:

a) Ein ist ein geordnetes Paar natürlicher Zahlen. Man schreibt (a, b). (Äquivalenzklassenkonzept)

Für den gewöhnlichen Bruch gilt: $a < b$

Für die Bruchzahl gilt: $a \geq b$

~~Für~~ Der ~~den~~ gemischte Bruch ist auch nur über Bruchzahlen darstellbar.

Diese Paare natürlicher Zahlen bilden Äquivalenzklassen, ~~welche~~ wobei alle Elemente der Äquivalenzklasse (Ä.K.) den selben Wert haben. Die Klassenbildung läuft wie folgt:

$(a, b) = (a \cdot x, b \cdot x)$ im Zahlenbeispiel $(1, 5) = (3, 15), \ldots$

$= (2, 10)$

$= (5, 25)$

u.v.m.

---

① Man unterscheidet zwischen „gewöhnlichem Bruch", wobei der Wert dessen < 1, der Bruchzahl ≥ 1 und dem gemischten Bruch, der eine ~~Z~~ natürliche Zahl ~~und~~ und einen Bruch darstellt: $a \frac{x}{y}$ mit $(a, x, y \in \mathbb{N})$.

~~Bruch~~ Den Zahlenraum der Brüche nennt man $\mathbb{Q}$

Diese Ä.k. bilden eine Äquivalenzrelation, die wie folgt definiert ~~wird~~ ist:

~~(a, b) = (a~~

$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$ (mit $a, b, c, d \in \mathbb{N}$)

Diese Äquivalenzrelation beschreibt die Gleichheit der beiden geordneten Paare, sie gehören demnach der gleichen Ä.K. an. ③

b) Ein Bruch ist die Lösung der Gleichung der Art $x \cdot 7 = 5$. ②
Diese lässt sich in $\mathbb{N}$ nicht mehr berechnen, also ist eine ~~Zah~~ Zahlenbereichserweiterung notwendig. (Gleichungskonzept).
Für den gewöhnlichen Bruch gilt $x \cdot a = b$ mit $b < a$. Für den die Bruchzahl gilt ~~a~~ $x \cdot a = b$ mit $b \geq a$. Auch hier lässt sich der gemischte Bruch durch die Bruchzahl darstellen.

---

③ Rechenoperationen sind definiert über

$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd)$

$(a, b) + (c, d) = (ad + cb, bd)$ wobei sich diese dann in $\mathbb{N}$ berechnen lassen.

---

② oder allgemein formuliert $x \cdot a = b$ wobei $x, a, b \in \mathbb{N}$ und $a \neq b$

Rechenoperationen können mit Hilfe des gewöhnlichen Gleichungsrechnen hergeleitet werden.

Bsp. I $x \cdot 7 = 5$ • II $y \cdot 8 = \cancel{8}3$ => $x = \frac{5}{7}$ $y = \frac{5}{6}$

I + II $x \cdot 7 \cdot y \cdot 8 = 5 \cdot \cancel{8}3$ ← die 5 durch die 3 ersetzt, nur der Deutlichkeit halber

$xy \cdot 7 \cdot 6 = 5 \cdot \cancel{8}3$

$x \cdot y = \frac{5 \cdot \cancel{8}3}{7 \cdot 6}$ => $\frac{\text{Zähler} \cdot \text{Zähler}}{\text{Nenner} \cdot \text{Nenner}}$

auf die selbe Art und Weise lassen sich andere Rechenoperationen herleiten.

c) Ein Bruch ist die Verkettung zweier Operatoren.
In der Schule werden oft Operatoren eingesetzt um Rechenanweisungen zu geben.

Bsp.: $5 \rightarrow \boxed{\cdot 3} \rightarrow 15$

Sie haben praktisch die Funktion von Maschinen, in der die eingegebene Zahl (hier: 5) berechnet (hier: mal drei) wird und schließlich das Ergebnis herausgegeben wird (hier: 15). Dieses Operationskonzept dient meist zur Einführung der Brüche.

$$5 \rightarrow \boxed{\cdot 3} \rightarrow 15 \rightarrow \boxed{: 5} \rightarrow 3$$

Es werden zwei Operatoren aneinander gehangen, die später der Einfachheit halber als ein Operator gesehen werden $\boxed{\cdot \frac{3}{5}}$ wobei der Bruchstrich das „Geteilt“-Zeichen ~~sym~~ ausdrückt.

d) Brüche sind Zahlen zur Beschreibung physikalischer Größen.

Bsp. $\frac{1}{2}$ m ; $\frac{1}{4}$ l ; $\frac{1}{8}$ kg ; $\frac{4}{2}$ m^2

~~Bei~~ hierbei spielt es jedoch eine Rolle ob die Einheiten bezüglich des Bruches kommensurabel sind um realistische Aussagen zu treffen.

Brüche beschreiben also Teile von physikalischen Größen.
Dies kann man auch als „Rechenmaschine“ darstellen:

$$1\,m \quad \boxed{\cdot \frac{1}{2}} \quad \frac{1}{2}\,m$$

Eine Größe wird in $2 \cdot \frac{1}{2}$ m geteilt.

Unter dem Größenkonzept ist der Verhältnisaspekt und der Teil-vom-Ganzen-Aspekt zu unterscheiden.

Verhältnisaspekt: Ein Bruch drückt aus, in welchem Verhältnis zwei Größen zueinander stehen.

Bsp. Der Mensch besteht aus $1/3$ aus Wasser und zu $2/3$ aus organischen Stoffen.

Teil-vom-Ganzen-Aspekt: $\frac{1}{2}$ m bedeutet, dass es die Hälfte von einem Meter ist. oder: Man nehme einen Meter und teile ihn in 2 gleiche Teile.

$\frac{3}{4}$: Man nehme einen Meter (z.B. einen Stock) teile ihn in 4 gleiche Teile und nehme 3 davon.

Ein Bruch beschreibt also der wievielte Teil vom Ganzen vorliegt.

Dabei kann wieder unterschieden werden:

- gewöhnlicher Bruch: es ist ein Teil vom Ganzen
- Bruchzahl: es kann es Ganzes sein und/oder auch mehr als das, also noch weitere Teile von weiteren Ganzen.
- gemischter Bruch: der gemischte Bruch stellt dar, dass es sich um Ganze und Bruchteile handelt: $1\frac{1}{2}$: Ein Ganzes und die Hälfte eines weiteren Ganzen.

(2) Das Äquivalenzklassenkonzept von Brüchen definiert die Addition wie folgt: $(a,b)+(c,d):=(a\cdot d+b\cdot c, bd)$ und lässt sich dadurch in $\mathbb{N}$ berechnen.

Für den unterrichtlichen Gebrauch hat diese Auffassung der Brüche, jedoch keine Bedeutung, weder für die Addition, noch von anderen Rechenoperationen. Sie ist nur für den wissenschaftlichen Bereich von Bedeutung.

Das Gleichungskonzept ~~kann ei defini~~ ~~lost~~ leitet die Addition wie folgt her:

I Zwei Brüche sollen addiert werden, da Brüche die Lösungen zu Gleichungen sind, werden zwei Gleichungen addiert:

$$\mathrm{I} \quad x \cdot 7 = 5 \quad \Rightarrow x = \frac{5}{7} = \frac{\text{Zähler}_1}{\text{Nenner}_1}$$

$$\mathrm{II} \quad y \cdot 8 = 3 \quad \Rightarrow y = \frac{3}{8} = \frac{\text{Zähler}_2}{\text{Nenner}_2}$$

$$\mathrm{I} \quad x \cdot 7 = 5 \quad | \cdot 8$$

$$\mathrm{I}' \quad x \cdot 7 \cdot 8 = 5 \cdot 8$$

$$\mathrm{II} \quad y \cdot 8 = 3 \quad | 7$$

$$\mathrm{II}' \quad y \cdot 8 \cdot 7 = 3 \cdot 7$$

$$\mathrm{I}' + \mathrm{II}' \quad x \cdot 7 \cdot 8 + y \cdot 8 \cdot 7 = 5 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 7$$

$$(x + y) \cdot (7 \cdot 8) = 5 \cdot 8 + 3 \cdot 7 \quad | : (7 \cdot 8)$$

$$x + y = \frac{5 \cdot 3 + 8 \cdot 7}{7 \cdot 8} \quad \frac{5 \cdot 8 + 3 \cdot 7}{7 \cdot 8}$$

$$x + y \Rightarrow \frac{\text{Zähler}_1 \cdot \text{Nenner}_2 + \text{Zähler}_2 \cdot \text{Nenner}_1}{\text{Nenner}_1 \cdot \text{Nenner}_2}$$

Diese Vorgehensweise ist zwar schlüssig, setzt zum Verständnis jedoch das ~~setzt~~ Beherrschen von ~~Lösen~~ von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten voraus. Ich bezweifele, dass dies an der Hauptschule zum Zeitpunkt der Einführung der Brüche gegeben ist. Es ist jedoch trotzdem eine Möglichkeit, die Regeln der Addition damit herzuleiten, jedoch sollte dies gemeinsam an der Tafel geschehen. Dann haben die Schüler die Chance den Vorgang nachzuvollziehen.

Das Operatorkonzept könnte die Addition wie folgt einführen:

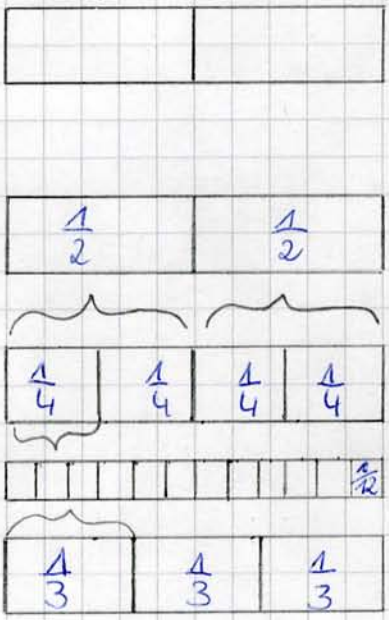
$$1 \rightarrow \boxed{\cdot 9} \rightarrow 9 \quad + \quad 1 \rightarrow \boxed{\cdot 8} \rightarrow 8 \qquad 3 + 2 = 5$$

$$3 \leftarrow \boxed{:3} \leftarrow \qquad\quad 2 \leftarrow \boxed{:4} \leftarrow$$

Operator $\frac{9}{3}$ Operator $\frac{8}{4}$

Bei diesem Konzept ist es allerdings schwierig eine allgemeine Regel abzuleiten, da die Operatoren getrennt voneinander betrachtet werden.
~~Man~~ Es ist schwer an diesem Prinzip auf die Notwendigkeit des Hauptnenners zu schließen, was im Gegensatz bei dem Gleichungskonzept deutlich wurde.

Das Größenkonzept stellt Brüche als Teil vom Ganzen oder Verhältnis der einzelnen Teile zueinander dar.



Dies sei ein Stock mit der Länge 1m, der in 2 Hälften geteilt wird.

Dies sei~~x~~ ein Stock, mit der Länge 1m, der in 2 Hälften geteilt wird.

s. oben, der in 4 gleiche Stücke geteilt wird

...der in 3 gleiche Teile geteilt wird.

(4)
Bei diesem Prinzip erkennt der Schüler, dass die 4 Stücke Vielfache von den beiden Hälften sind und kann sich damit selbst ~~erklären~~ das Erweitern erklären.
Auch bei den teilerfremden Brüchen $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{3}$ kann man mit dem Schüler anhand des Beispiels von $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$.

(4) Die Problemstellung liegt nun darin $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$ zu addieren und später $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ bzw. $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}$. Für Rechnungen wie $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ kann das naive Zahlenverständnis genutzt werden, denn diese Zahlen

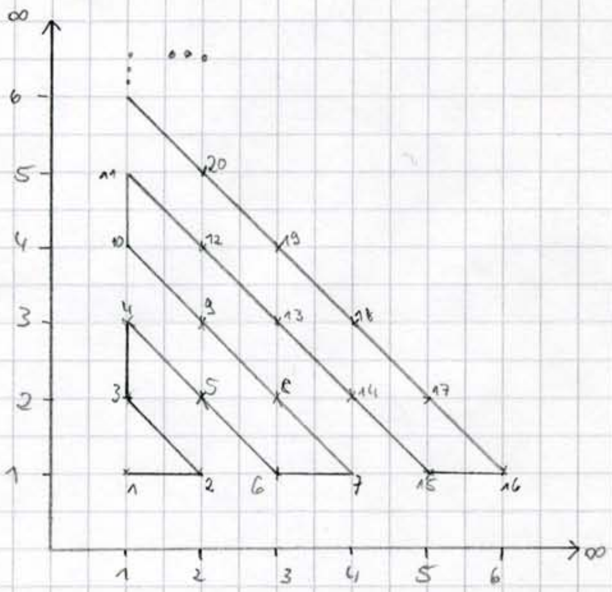
herleiten, dass man auch einfach die beiden Stücke in so viele Teile zerlegt, dass beide ~~damit~~dadurch ausgedrückt werden können.

Das Größenkonzept ist also meiner Meinung nach das Anschaulichste Konzept von allen. Der Schüler hat hier nicht nur die Chance nachzuvollziehen, sondern auch aktiv an der Lösungsfindung beteiligt zu sein.

(4) Brüche sind Paare natürlicher Zahlen: (a,b) mit $(a,b \in \mathbb{N})$
Es kommen also zu den bereits bekannten Zahlen in $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ noch weitere hinzu. ~~Diese verhalten sich sich jedoch genauso wie die Zahlen in~~
Der Unterschied zw. $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{N}$ bzw $\mathbb{Z}$ besteht darin, dass nun der Zahlenstrahl nun komplett ohne Lücken ~~gefü~~ beschrifft werden kann (= Schülergerechte Formulierung), d.h. der Zahlenbereich ist dicht, da ~~es für~~ zwischen jedes a und b (mit $a<b$) noch eine Zahl aus $\mathbb{Q}$ dazwischen passt:

$$a < \frac{a+b}{2} < b$$

Die Mächtigkeit der beiden Zahlenbereiche ist gleich groß denn ~~aus j~~ zu jedem Element aus $\mathbb{N}$ lässt sich eindeutig ein Element aus $\mathbb{Q}$ zuordnen:



Eine Möglichkeit der Interpretation ist die y-Achse als Zähler des Bruches aus $\mathbb{Q}$ und die x-Achse als Nenner des Bruches aus $\mathbb{Q}$ mit den Elementen auf x und y selbstverständlich $\in \mathbb{N}$. ~~auf~~

Das bedeutet für die Zuordnung:

$\lvert\mathbb{Q}\rvert$	=	$\lvert\mathbb{N}\rvert$
$\frac{1}{1}$	$\Rightarrow$	1
$\frac{1}{2}$	$\Rightarrow$	2
$\frac{2}{1}$	$\Rightarrow$	3
$\frac{3}{1}$	$\Rightarrow$	4
$\frac{2}{2}$	$\Rightarrow$	5
$\frac{1}{3}$	$\Rightarrow$	6
	usw.	

Es zeigt sich auch, dass sich die Paare der Zahlen aus $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Q}$ genauso verhalten wie in $\mathbb{N}$.

$\mathbb{N}$	$\mathbb{Q}$
a	$(0, a)$
$a + b$	$(0, a) + (0, b) = (0b + 0a, a \cdot b)$
$a \cdot b$	$(0, a) \cdot (0, b) = (0 \cdot 0, a \cdot b) = a \cdot b$

Zahlenbereichserweiterung anhand des Äquivalenzklassenkonzepts ~~beschrieben~~ durchgeführt:

- $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nennt man Menge der natürlichen Zahlen.
- (a, b) mit $(a, b \in \mathbb{N})$ sind Menge der geordneten Paare
- Klassenbildung: für die Klassenbildung gilt:
  $(a, b) = (a \cdot x, b \cdot x)$
  (siehe Aufg. 1a) S. 2)

- diese Menge der geordneten Paare stehen in Relation zueinander: $(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$

und diese Relation ist eine Äquivalenzrelation

Beweise für

Reflexivität der Relation

Symmetrie der Relation

Transitivität der Relation

=> Fortsetzung auf Seite 13

③ Sachanalyse

Bei dieser Aufgabe ist es wichtig, dass die Schüler (im Folgenden abgekürzt mit SS) eine genaue Bruchvorstellung haben.

Größenvergleiche müssen gut eingeübt sein. ~~werden, denn der Nenner~~

Es geht bei dieser Aufgabe darum, die größtmögliche Summe zu erreichen, also muss bei so kleinem Zähler wie möglich ein so großer Nenner wie möglich.

Bei $\frac{7}{1}$ ist die Größte Zahl die man mit den vorgegebenen erzielen kann.

~~Da die bei~~ Die 1 muss als Nenner genommen werden, denn der Nenner teilt den Zähler in Teile. Die 1 teilt in die wenigsten Teile, und erzielt damit die größten Teile.

Der Zähler muss so groß wie möglich sein, denn er beschreibt die Anzahl der Teile.

Daraus folgt, dass die beiden Brüche $\frac{7}{1} + \frac{5}{3}$ sein so müssen um die größt mögliche Summe zu erzielen.

Dies wird die größte Schwierigkeit ~~Bei~~ für die Schüler sein diesen Zusammenhang herzustellen. Dafür muss ihnen im Vorfeld ein gutes Verständnis von Brüchen beigebracht worden sein.

Eine weiterer Bestandteil der Stunde ist die Wiederholung der Addition ~~of~~ von Brüchen. Hier könnten falsche Annahmen auftauchen, dass es für die beiden Brüche $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ b und d so zu wählen, dass die Summe b+d möglichst klein ist, es dreht sich jedoch um das Produkt, da der Hauptnenner gebildet werden muss.

Ziele der Stunde

Grobziel: Operative Übung der Addition

Feinziele: der Größenvergleich von Brüchen

Grobziel: - die SS festigen die Addition von Brüchen
- die SS festigen ihre Bruchvorstellung

Feinziele: - die SS wiederholen den Größenvergleich von Brüchen
- die SS wiederholen die Regeln der Addition von Brüchen
- die SS festigen ihre Vorstellungskraft von Brüchen

Inhalte von vorangegangenen Stunden
- Größenvergleiche von Brüchen
- Addition von Brüchen

Stundenverlauf

Kopfrechenphase:

Die SS ordnen Brüche der Größen nach:

$\frac{3}{1}$; $\frac{5}{2}$; $\frac{4}{2}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{8}{8}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{29}{40}$ usw.

Wir beginnen damit jeweils nur zwei miteinander zu vergleichen und lassen es immer mehr werden. Dadurch wird wichtiger Stoff wiederholt und wird präsent für die Stunde.

Motivation

Aufgaben der Art:

- ~~Ihr habt~~ Du hast zwei Zahlen zur Verfügung 3, 7 was ist der größtmögliche Bruch den ~~ihr~~ du damit machen kannst?
- " - kleinstmöglichen
- Du hast 3 Zahlen 2, 3, 5
  - größtmöglicher Bruch
  - kleinstmöglicher Bruch

Problemstellung

- Stellen der Aufgabe (s. Angabenblatt)

Erarbeitung:

- SS bringen Lösungsvorschläge
  - Alle Zahlen durchprobieren

Lehrer: das dauert doch zu lange, muss auch einfacher gehen

- wir müssen a, ~~b~~ c so wählen, dass a + ~~b~~ c möglichst groß (analog: d, b)

~~[illegible]~~: natürliche kann auch sofort die richtige Lösung von den SS kommen.

Aber einfach darauf eingehen lässt die SS zurück, die es noch nicht verstanden haben und nimmt ihnen die

Chance mit zu denken und es auch - wenn auch etwas später - zu verstehen.

Lehrertip: Wenn wir die Größtmögliche Summe berechnen wollen, brauchen wir 2 Bruchzahlen die auch jeweils so groß wie möglich sind. ~~Vora~~ (5)

(7)
- Ausprobieren in PA: Wer hat am Ende die größten Zahlen und damit die größte Summe
  -> Wettstreit

(6) seite 13

(5)

Vergleiche zu $\mathbb{N}$: $a + b = c$ je größer a und je größer b, desto größer c

-> falls den SS dies nicht klar ist, verdeutlichen an Beispielen in $\mathbb{N}$

- Zusammentragen der Ergebnisse
„Wer hat die größten Zahlen ~~heraus~~ gebildet?"
„Wer hat die größte Summe herausbekommen?"
- SS soll erklären wie er die größte Zahl gebildet hat
- SS soll die Addition vorführen

Sicherung:
- Lehrer führt an der Tafel vor:
  × Um einen Bruch zu bekommen der möglichst groß ist, braucht man möglichst viele Teile von Teilen, die so groß wie möglich sind ($\hat{=}$ Zahl klein)
  -> SS sollten sich darüber aufgrund guter Vorbereitung und viel Übung in der Bruchvorstellung bewusst sein
  × also: $\frac{\_}{1}$ $\frac{\_}{3}$ als Nenner und 7,5 als Zähler: $\frac{7}{1} + \frac{5}{3}$

× gemeinsames Berechnen

× Wiederholung der Addition: ~~SS helfen~~

SS erklären wie Addition von statten geht

- Hauptnenner bilden, Zähler erweitern, addieren, kürzen

$$\frac{7}{1} + \frac{5}{3} = \frac{7 \cdot 3}{3} + \frac{5}{3} = \frac{21+5}{3} = \frac{26}{3} = 8\frac{2}{3}$$

× SS übertragen ins Heft

Hausaufgabe

- gleiche Aufgabenstellung

... setze so ein, dass eine möglichst kleine Zahl entsteht.

---

⑥
Die SS probieren verschiedene Möglichkeiten aus, üben somit auch nochmal die Addition.

⑦
~~Di~~ gemeinsame Wiederholung der Addition, um zu vermeiden, dass SS in der folgenden Probierphase falsche Strategien anwenden und diese auch ~~die~~ das häufige Anwenden festigen

---

Fortsetzung Aufgabe 4, Beweis der Äquivalenzrelation

$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$

Reflexivität: $(a,b) \sim (a,b)$ (zu zeigen)

$a \cdot b = b \cdot a$ (lt. Def. der Relation)

$a \cdot b = a \cdot b$ (Kommutativität von $\cdot$ in $\mathbb{N}$)

Symmetrie: ~~$(a,b) \sim (b,a)$ zu zeigen~~

$(a,b) \sim (c,d)$ dann auch $(c,d) \sim (a,b)$ (zu zeigen)

(erf. Def.) $a \cdot d = b \cdot c$ $\qquad c \cdot b = d \cdot a$

$a \cdot d = b \cdot c \quad = \quad a \cdot d = b \cdot c$

(da Symmetrie des "=" und Kommutativität von $\cdot$ in $\mathbb{N}$)

Transitivität $(a,b) \sim (c,d) \sim (e,f)$ dann auch $(a,b) \sim (e,f)$

Ⓘ $a \cdot d = b \cdot c$ (Vor.) $\qquad a \cdot f = b \cdot e$ (zu zeigen)

Ⓘⓘ $c \cdot f = d \cdot e$ (Vor.)

Ⓘ Ⓘⓘ $a \cdot \cancel{d} \cdot \cancel{c} \cdot f = b \cdot \cancel{c} \cdot \cancel{d} \cdot e$ (Kürzen in $\mathbb{N}$)

$a \cdot f = b \cdot e$ (Behauptung)

Axiome des neuen Zahlenbereichs:

- bzgl. Addition
  - x die Addition ist kommutativ
  - x die Addition ist assoziativ
  - x die Addition ~~ist~~ hat ein neutrales Element ~~(a,a)~~ $(0,a)$
  - ~~x die Addition hat ein inverses Element~~ ~~$(a,b) + e(c,d) = 0$ mit $e = b$ und~~

- es existiert ein x für das gilt

$(a,b) + x = (c,d)$ $\qquad$ mit $x = (y,z)$

$(a,b) + (y,z) = (c,d)$

→ bzgl. der Multiplikation

- die M. in $\mathbb{Q}$ ist kommutativ
- die M. in $\mathbb{Q}$ ist assoziativ
- die M. in $\mathbb{Q}$ ist distributiv
- die M. in $\mathbb{Q}$ besitzt ein neutrales Element (a, a)
- ~~die M. in $\mathbb{Q}$ besitzt ein inverses Element~~
- es existiert ein x für das gilt

  $(a,b) \cdot x = (c,d)$ mit $x = (y, z)$

  $(a,b) \cdot (y,z) = (c, d)$