THEMA Nr. 2

Aufgabe 1

Unter einem geom. Körper im Allgemeinem versteht man eine abgeschlossene Teilmenge des dreidimensionalen Raums, die durch endlich viele ebene oder gekrümmte Flächen begrenzt ist. Diese Flächen bezeichnet man mit Seitenflächen. Die Schnittmenge von je zwei Seitenflächen bilden die Kanten des Körpers. Die Schnittpunkte von mehreren Seitenflächen oder von mindestens drei Kanten, bezeichnet man Ecken.

Die Summe der Inhalte der Seitenflächen ergibt den Oberflächeninhalt eines Körpers oder kurz die Oberfläche. Die Größe des Raumes, der von dem Körper begrenzt wird, inklusive der Oberfläche, ist das Volumen des Körpers. Eine andere Beschreibung des Volumens ist: Die Menge aller Punkte die sich innerhalb oder auf dem Seitenflächen eines Körpers ~~liegen~~ befinden.

Die ~~K~~ geometrischen Körper, die in der Grundschule behandelt werden, können in Säuenkörpern, spitze Körper und platonische Körper unterteilt werden. Die Kugel fällt als einziger der zu behandelnden Körper in keine dieser Kategorien. Säulenkörper, die im Bayrischen Lehrplan der Grundschule genannt werden, sind das Prisma, der Zylinder, der Würfel und der Quader.

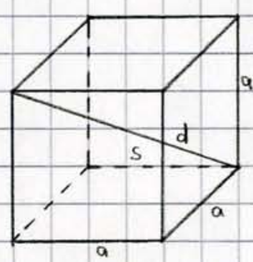
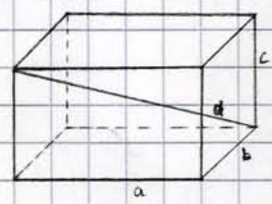
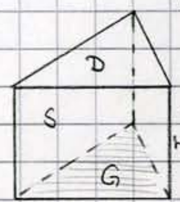
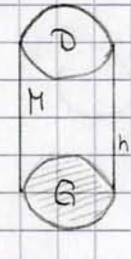
Durchzunehmende spitze Körper sind die Pyramide und der Kegel. Auf die Merkmale und Besonderheiten der aufgezählten geometrischen Körper, wird in der später folgenden Tabelle genauer eingegangen.
Der Würfel, Quader und die Kugel werden in der zweiten Jahrgangsstufe behandelt, die Restlichen in der dritten ~~Klasse~~ Jahr des Mathematikunterrichts.
In der vierten Klasse wird noch einmal genauer auf den Quader und dessen geometrische Besonderheiten und Netze eingegangen.
Die platonischen Körper werden zwar im Bayerischen Lehrplan nicht genannt, ~~sind~~ werden jedoch in einigen Schulbüchern thematisiert (z. B. Das Zahlenbuch 4).
Deshalb soll auf diese hier nur kurz eingegangen werden. Die drei wichtigen Merkmale eines platonischen Körpers sind:

- Seitenflächen sind regelmäßige n-Ecke
- Seitenflächen sind zueinander kongruent.
- immer gleichviele ~~n-Ecke~~ Seitenflächen stoßen in einer Ecke zusammen.

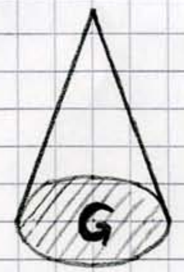
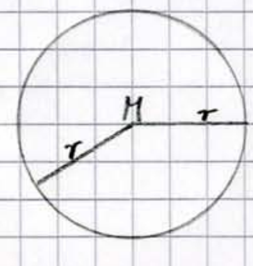
Es gibt genau fünf platonische Körper. Der Tetraeder, der Oktaeder und der Isokaeder bestehen aus regelmäßigen Dreiecken (~~4, 8~~ bzw. 20 Stück). Aus sechs Quadraten wird das Hexaeder gebildet. Der Dodekaeder besteht aus 12 regelmäßigen Fünfecken. Folgende Tabelle zeigt einige Eigenschaften dieser platonischen Körper.

| | n-Ecke | Winkel im n-Eck | Anzahl d. Kanten | Anzahl d. n-Ecken | Anzahl d. Ecken | Anzahl der Ecken die in einer Ecke zusammen stoßen |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Tetraeder | 3 | 60° | 6 | 4 | 4 | 3 |
| Hexaeder | 4 | 90° | 12 | 6 | 8 | 3 |
| Oktaeder | 3 | 60° | 12 | 8 | 6 | 4 |
| Dodekaeder | 5 | 108° | 30 | 12 | 20 | 3 |
| Isokaeder | 3 | 60° | 30 | 20 | 12 | 5 |

# Mathematische Eigenschaften der Säulenkörper

| | Würfel | Quader | Prisma | Zylinder |
|---|---|---|---|---|
| Definition | ... ist von sechs Ecken begrenzter Körper | Geo. Körper, der von sechs Rechtecken, deren Seiten senkrecht aufeinander stehen, begrenzt wird. | Geo. Körper, der entsteht wenn man ein n-Eck durch Parallelverschiebung entlang einer Geraden verschiebt, die nicht in der Ebene des n-Ecks liegt. | Geom. Körper der entsteht, wenn man eine Grundfläche G, die von einer Kurvenlinie begrenzt wird um einen Vektor $\vec{s}$ verschiebt. $\vec{s} \notin G$. |
| Anzahl der Ecken | 8 | 8 | $2 \cdot n$ | hat keine Ecken |
| Anzahl der Kanten | 12 | 12 | $3 \cdot n$ | 2 |
| Volumen | $V = a^3$ | $V = a \cdot b \cdot c$ | $V = G \cdot h$ (G = Grundfläche, h = Höhe) | $V = G \cdot h$ gerader Kreiszylinder $V = r^2 \pi h$ |
| 4 |  |  |  S = Seitenfläche, G = Grundfläche, D = Deckfläche |  M = Mantel |
| Winkeleigenschaften | alle Seiten und Kanten stehen senkrecht aufeinander (90°) | alle Seiten und Kanten stehen senkrecht aufeinander (90°) | bei schiefem Prisma: gegenüberliegende Winkel zw. zwei Seiten sind gleich groß; gerades Prisma: alle Seitenflächen stehen senkrecht auf Grund- und Deckfläche | gerader Zyl.: Mantel steht senkrecht auf der Grund- und Deckfläche |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Besonderes | Besonderer Quader und besonderes gerades, reguläres Prisma<br>Besitzt Um- und Inkreis. Mittelpunkt ist jeweils der Schnittpunkt S der Raumdiagonalen | besonderes gerades Prisma | schiefes Prisma<br>$S \not\perp G$<br>gerades Prisma<br>$S \perp G,\ S \perp D$<br>reguläres Prisma<br>Grund- und Deckfläche ist ein regelmäßiges n-Eck | gerades Zylinder<br>$M \perp G,\ M \perp D$<br>Kreiszylinder<br>Grund und Deckfläche ist ein Kreis |
| Symmetrieeigenschaft<br><br>5 | Ebenensymmetrie<br>· bzgl. der Mittelebenen<br>· bzgl. der Ebenen durch zwei sich schräg gegenüberliegende Kanten<br><br>Punktsymmetrisch bzgl. dem Schnittpunkts der Raumdiagonalen<br><br>Drehsymmetrisch<br>· bzgl. dem Schnittpunkts der Raumdiagonalen<br>· bzgl. jeder Raumdiagonalen (Drehachse) | Ebenensymmetrie<br>· bzgl. der Mittelebenen<br><br>punktsymmetrisch bzgl. dem Schnittpunkt der Raumdiagonalen<br><br>Drehsymmetrisch bzgl. dem Schnittp. der Raumdiagonalen | ~~bei geradem Prisma~~<br>jedes Prisma:<br>punktsymmetrisch und drehsymmetrisch bzgl. dem Schwerpunkt<br><br>gerades Prisma:<br>Ebenensymmetrisch bzgl. der Ebene, die senkrecht zu h verläuft und h halbiert | gerader Zylinder:<br>Ebenensymmetrisch bzgl. der Ebene, die senkrecht zu h verläuft und h halbiert<br><br>Punkt- und drehsymmetrisch bzgl. dem Schwerpunkt<br>Kreiszylinder:<br>drehsymmetrisch bzgl. der Geraden durch die Mittelpunkte der Grund- und Deckfläche |

| | Pyramide | Kegel | Kugel |
|---|---|---|---|
| Definition | Ein geometrischer Körper, der entsteht, wenn man alle Punkte eines n-Eckes ~~mit einem Punkt~~ geradlinig mit einem Punkt außerhalb der Ebene des n-Eckes verbindet | ... ist der von einer Kreisfläche und einem Punkt außerhalb der Ebene der Kreisfläche begrenzte Raum | Die Menge aller Punkte die von einem festen Punkt M höchstens den Abstand r hat. M ist der Mittelpunkt, r der Radius |
| Anzahl d. Ecken | $n+1$ | 1 | hat keine Ecken ... |
| Anzahl d. Kanten | $2 \cdot n$ | 1 | ... und Kanten |
| Volumen | $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ | $V = \frac{1}{3} G \cdot h$ | $V = \frac{4}{3} r^3 \pi$ |
| Besonderes | Pyramide ist gerade, wenn die Spitze auf der Geraden, die senkrecht zur Grundfläche ist und durch den Schwerpunkt des n-Eckes verläuft. Eine Pyramide ist regelmäßig, wenn die Grundfläche ein regelmäßiges n-Eck ist. | Ein Zylinder ist gerade, wenn die Höhe senkrecht zur Grundfläche und durch den Schwerpunkt von G Kreiskegel: Grundfläche ist ein Kreis | |
| |  |  |  |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Winkeleigen-schaften | Bei einer regelmäßigen Pyramide sind die Winkel zwischen Seitenflächen und Grundfläche gleichgroß → | " | Besitzt keinen Winkel (Vollwinkel um Mittelpunkt 360°) |
| Symmetrie-eigenschaft | <u>Regelmäßige Py.</u> | <u>Kreiskegel</u> | |
| | Achsensymmetrisch bzgl. der Höhe | achsensymmetrisch bzgl. der Höhe | • dreh- und punktsymmetrisch bezüglich dem Mittelpunkt<br>• achsensymmetrisch bzgl. jeder Gerade durch den Mittelpunkt (durch jeden Durchschnitt)<br>• Ebenensymmetrisch bzgl. jeder Ebene durch M. |

Aufgabe 2

Bei den Würfelmodellen kann man zwischen einem Vollmodell, einem Flächenmodell, einem Kantenmodell und einem Hohlmodell unterscheiden. Diese Modelle eignen sich für verschiedene Lernziele unterschiedlich gut. Ein Vollmodell ist im inneren ausgefüllt. So zum Beispiel ein Holzstock in ~~Quader~~ Würfelform oder ein Bauklotz. Diese Art Modell eignet sich nicht so gut für den Einsatz im Unterricht, da damit modelliert und gehandelt werden kann. Es eignet sich jedoch zur Betrachtung der Oberfläche oder der Kanten. Die Seitenflächen können genau betrachtet und besprochen werden. ~~Die Oberfläche kann durch Bemalen der Seitenflächen abgetragen werden. Wird der Körper dabei in richtiger Vorgehensweise gekippt entsteht~~

Es kann so herausgearbeitet werden, dass alle Seitenflächen Quadrate sind und die Kanten aufeinander senkrecht stehen. Die Oberfläche kann durch Bemalen der Seitenflächen abgetragen werden. Wird der Körper dabei in korrekte Art und Weise gekippt bzw. abgerollt, entsteht ein Würfelnetz. Durch verschiedene Abrollarten entstehen auch verschiedene Netze. Auch kann ~~mit~~ ein vorgegebenes „Würfelnetz" aus Papier, mit Hilfe eines Vollkörpers daraufhin untersucht werden, ob es ein „richtiges" oder „falsches" Würfelnetz ist. Der Vollkörper wird versucht mit dem Netz zu verpacken. Das Vollkörpermodell eignet sich nicht für die Betrachtung der genauen Lage der Kanten (parallel...) und der Raumdiagonalen und des Inneren eines Würfels.

Das Flächenmodell (z.B. eine Schachtel) ist im Inneren hohl. Es eignet sich sehr gut zur Erarbeitung von Netzen, in unserem Fall von Würfelnetzen. Eine würfelförmige Schachtel kann auf verschiedene Weisen aufgeschnitten werden. Es entstehen verschiedene Netze. Es kann herausgefunden werden, was die kleinste Anzahl von Schnitten ist, um ein Netz zu bekommen. Bei dem entstandenen Netz können Flächen abgetrennt und an einer anderen Stelle angebracht werden (Klebebau). Es wird nun durch zusammefalten geprüft, ob die neue Konstellation ein Würfel-Netz darstellt. Eine andere Möglichkeit ist an den Flächenmodell bestimmte Stellen zu markieren um dann zu sehen, wo sich diese im Netz befinden.

Das Kantenmodell repräsentiert nur die Kanten des jeweiligen Körpers. Diese können mit Stecksätzen gesteckt werden oder mit Holzspießen und Knetgummi hergestellt werden. Um einen Würfel herzustellen ist es wichtig zu wissen, dass die Kanten gleich lang sind und senkrecht aufeinander stehen. Bei dem Stecksatz braucht man z.B. immer die gleiche Anzahl der selben Teile um eine Kante herzustellen.

An dem Kantenmodell kann die Lage der Kanten sehr gut betrachtet werden. Die Schüler erkennen, dass jeweils 4 Kanten parallel sind und auch dass sich die Raumdiagonalen in einem Punkt schneiden (für Leistungsstärkere, Differenzierung). Das Kantenmodell eignet sich nicht zur Erarbeitung d. Würfelnetze.

Das Hohlmodell eignet sich vor allem zum Be- und Umfüllen und wird meist bei der Behandlung de Hohlmaße eingesetzt. Hier kann erarbeitet werden, das ein Würfel mit der Seitenlänge 10cm = 1dm genau einen Liter fasst.

Für den Rest des Mathematikunterrichts hat ein Hohlkörper weniger Bedeutung.

Aufgabe 3

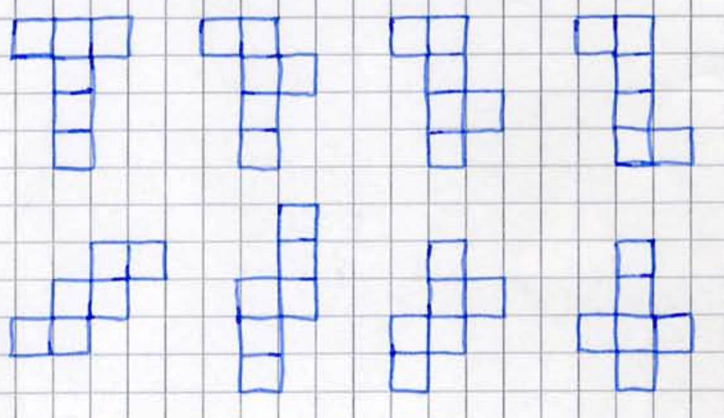
Sachstruktur:

Eigenschaften des Würfels siehe Aufgabe 1

Ein Würfel hat insgesamt 11 verschiedene Würfelnetze.

Ein Netz ist die Fläche, die entsteht, wenn man einen Körper abrollt oder „auswickelt".

Die verschiedenen Würfelnetze



Lehrplanbezug: 2.13. Jahrgangsstufe

Einbettung der Unterrichtseinheit

- In der vorhergehenden Stunde wurde auf den Würfel als Körper eingegangen und Eigenschaften besprochen.
- Schüler sollen Würfelschachteln von zu Hause mitbringen

Lernvoraussetzungen:

- Die Schüler wissen, dass ein Würfel aus sechs Quadraten besteht

Grobziel: Die Schüler sollen verschiedene Würfelnetze entdecken und anhand handelndem Umgang und kopfgeometrischen Übungen richtige von falschen Netzen unterscheiden können.

Feinziele: - Schüler sollen verschiedene Würfelnetze entdecken

- Schüler sollen vorgegebene Würfelnetze überprüfen können

- Kopfgeometrische Übungen

| Zeit | Unterrichtsverlauf | Material/Methoden |
|---|---|---|
| 10min | Hinführung<br>Lehrer schneidet für alle sichtbar den Pappwürfel aus.<br>~~Ein~~ -> Würfelnetz entsteht<br>d: „Das ist ein Würfelnetz."<br>Ein Schüler soll eine Fläche abschneiden und ein anderer sie an einer anderen Stelle wieder anbringen.<br>-> Es wird versucht den Würfel wieder zusammen zu bauen<br>-> so lange wird das Netz verändert bis es einmal nicht klappt<br>-> S. erkennen, dass das Würfelnetz nicht beliebig sein darf | Lehrerkreis<br>Flächenmodell von Würfel (Papp-schachtel) |
| 15min | Erarbeitung<br>Arbeitsauftrag: „Schneidet nun euren Würfel aus, dass ihr auch ein Netz bekommt und zeichnet es auf ein Papier ab."<br>-> Die entstandenen Netze werden an der Tafel gesammelt<br>-> Netze werden nach Kongruenten geordnet<br>-> Lehrer ergänzt die fehlenden Netze | Jeder Schüler hat einen Pappwürfel d. hat Ersatzwürfel dabei<br>Einzel-/Partner-arbeit |

| Zeit | U-verlauf | Material/Methoden |
|---|---|---|
| | Vertiefung | |
| | S. bekommen Arbeitsblatt | Arbeitsblatt |
| | Aufgabe 1 | |
| | verschiedene Netze sind gekennzeichnet<br>-> welches richtig / falsch?<br>(Überprüfung mit Material) | |
| | Aufgabe 2 | |
| | ~~An einem W~~ Ein eingetauchter Würfel ist gegeben<br>Wie schaut ein Netz dieses Würfels aus?<br>-> Schüler zeichnen Netz auf AB | |
| | Für Leistungsstärkere | |
| | - Welche Ecken des Netzes stoßen zusammen | |