1. • In der Prozentrechnung spielt zunächst einmal der Begriff „Prozent" selbst eine wichtige Rolle. Der Begriff stammt aus dem Lateinischen und bedeutet „per centum" also „durch Hundert". Die Prozentrechnung ist eine Verhältnisrechnung, bei der bestimmt werden kann, in welchem Größenverhältnis ein Wert zu einem Ausgangswert steht. Der Ausgangswert wird dabei mit 1 bzw. mit 100% gleichgesetzt.

1% ist also $\frac{1}{100}$ oder $0{,}01$.

Sei x der Ausgangswert und y der Wert, der zu x ins Größenverhältnis gesetzt werden soll, so gilt:

$y\%$ von x $\rightarrow \frac{y}{100} \cdot x$

• Die Begriffe Grundwert, Prozentwert und Prozentsatz sind bei der Prozentrechnung von großer Wichtigkeit.
Der Grundwert ist eine Ausgangsgröße. Der Prozentsatz bezeichnet das Größenverhältnis relativ zum Grundwert. Wird dieser absolut bestimmt erhält man den ~~Prozentwert~~ Prozentwert.

• Der Sinn der Prozentrechnung wird durch die Begriffe „absoluter Vergleich" gegeben. Der absolute Vergleich bezeichnet den direkten Vergleich zweier Größen. Der relative Vergleich kann durch die Prozentrechnung ermittelt werden. Er bezieht sich auf das Größenverhältnis der Vergleichszahlen zu ihren jeweiligen Grundwerten.

• Bei der Anwendung der Prozentrechnung im täglichen Leben sind die Begriffe „vermehrter Grundwert" bzw. „verminderter Grundwert" wichtig. Diese ergeben sich, wenn man vom Grundwert den Prozentwert abzieht, oder wenn man auf dem Grundwert den

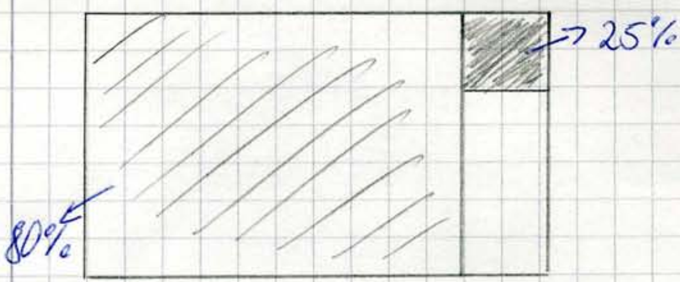
Prozentwert aufschlägt.

Im Alltag wird man ständig damit konfrontiert, z. B. bei der Berechnung der Mehrwertsteuer, oder beim Einkauf im Sommerschlussverkauf, ...

2. Grundaufgaben der Prozentrechnung ~~und ihre~~

Mit Prozent bzw. Prozentwert ist immer der Teil eines Ganzen gemeint. d. h. ~~die~~ der Grundwert wird immer mit 1 bzw. mit 100% gleichgesetzt. Die Schüler kennen bereits das Rechnen mit Brüchen, haben also schon eine Vorstellung von der Rechnung mit „Teilen eines Ganzen". Wichtig ist es nun, den Schülern zu vermitteln, dass der Ausgangswert ins Verhältnis 1 gesetzt wird. Zur Veranschaulichung dienen hierbei geometrische Modelle.

Bsp. 1: Das Rechteck



Der Flächeninhalt des Rechtecks wird mit 100% gleichgesetzt. Man nehme nun $\frac{4}{5}$ des Flächeninhalts => $100\% \cdot 4 = 400\%$;

$400\% : 5 = 80\%$

Man nehme nun aus dem verbleibenden Rest ein Viertel des Flächeninhalts heraus. Dazu ist es nötig, dass dieser Rest wiederum mit 100% gleichgesetzt wird.

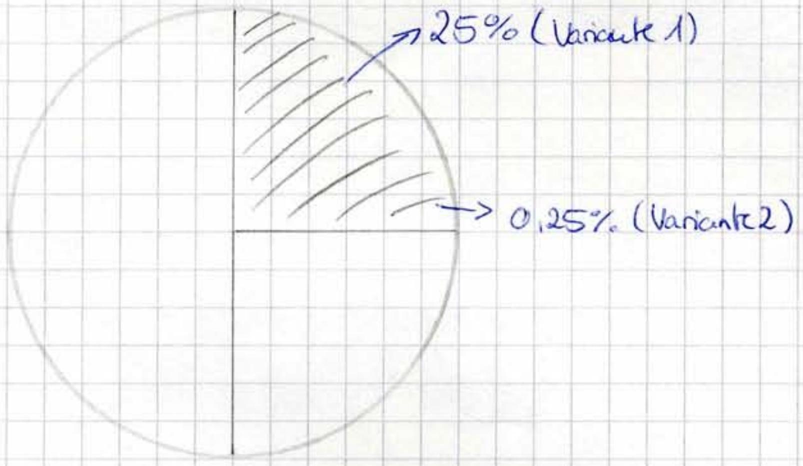
=> $100\% \cdot 1 = 100\%$; $100\% : 4 = 25\%$

Insgesamt ergibt sich aus dem Rest folgender Wert in Bezug auf das Ausgangsrechteck:

$$(100\% \cdot \frac{4}{5}) \cdot \frac{1}{4} = 80\% \cdot \frac{1}{4} = 20\%$$

Es bleiben also bezüglich des Ausgangsrechtecks 20% des Flächeninhalts übrig.

Bsp. 2 : Der Kreis



~~Der Kreis sei 100%~~

Der Flächeninhalts des Kreises sei 100%. Nimmt man $\frac{1}{4}$ davon heraus, so gilt: $100\% \cdot \frac{1}{4} = 25\%$

Man hat als 25% des Flächeninhalts herausgenommen.

Eine weitere Variante dieses Beispiels ergibt sich, wenn man den Flächeninhalt des Kreises gleichsetzt mit 1%. Dann gilt:

$$1\% \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\% = 0,25\%$$

Der nächste Schritt bei der Prozentrechnung ist das Vermitteln der Grundbegriffe und deren Berechnung.

- Das Rechnen mit dem Begriff Grundwert, Prozentwert und Prozentsatz.

Es seien: Grundwert : G

Prozentwert : P

Prozentsatz : ~~p~~ q

Der Prozentwert wird ermittelt, indem man den Grundwert mit

den Prozentsatz multipliziert.

- Darstellung in Gleichungsform:

$P = G \cdot q$

- Darstellung in Operatorform:

$G \xrightarrow{\cdot q} P$

Daraus ergeben sich dann auch die Berechnungen von

Grundwert und Prozentsatz.

Behandelt man im Unterricht die Darstellung in Gleichungsform

ist es wichtig, dass die Schüler Äquivalenzumformungen bereits beherrschen.

Daraus ergibt sich dann:

$G = \frac{P}{q}$ und $q = \frac{P}{G}$

Sehr sinnvoll ist die Darstellung in der Operatorform vor allem

für die Umformung auf G als gesuchte Größe. Dies wird

erreicht durch die Umkehrung der Rechnung:

$G \xrightarrow{\cdot q} P \Rightarrow G \xleftarrow{: q} P$

Die Darstellung in Operatorform für Prozentsatz als gesuchte Größe

ergibt sich folgendermaßen: $G \xrightarrow{\cdot ?} P$

„g mal wieviel ergibt P?"

$\Rightarrow P \xrightarrow{: G} q$

Beispiel:

Gestern fuhren auf einer Straße 40 Autos zu schnell. Das

waren 5% aller Autos. Wieviele Autos fuhren insgesamt?

geg.: $P = 40$; $q = 5\% = \frac{5}{100}$

Ges.: G

$G = \frac{P}{q} = 40 : \frac{5}{100} = \frac{4000}{5} = \underline{\underline{800}}$

Es fuhren gestern insgesamt 800 Autos auf der Straße.

Diese ~~Rechng.~~ Rechnung lässt sich auch im Dreisatz rechnen. Sie ist sehr gut dafür geeignet, den Dreisatz im Unterricht einzuführen. Sinnvoll ist auch hier wieder die Darstellung mit Pfeilen zur Verständlichkeit der einzelnen Rechenschritte. Die Berechnung der Aufgabe im Dreisatz würde dann bei der Einführung des Dreisatzes folgendermaßen aussehen:

$$
\begin{array}{lcl}
40 \text{ Autos} & \hat{=} & 5\,\% \\
\downarrow :5 & & \downarrow :5 \\
8 \text{ Autos} & \hat{=} & 1\,\% \\
\downarrow \cdot 100 & & \downarrow \cdot 100 \\
800 \text{ Autos} & \hat{=} & 100\,\%
\end{array}
$$

Außer der Berechnung des Dreisatzes wird den Schülern noch einmal veranschaulicht, dass der Grundwert immer 100 % entspricht.

Nächster Schritt ist der Vergleich zweier Größen mittels der Prozentrechnung. Dies behandelt man im Unterricht zunächst mit einer einfachen Beispielaufgabe:

In Klasse 7a sind 20 Schüler, in Klasse 7b 25 Schüler. Beim letzten Mathetest hatten in Klasse 7a 5 Schüler die Note 1, in Klasse 7b 6 Schüler.

Beim absoluten Vergleich ~~werde~~ wird die Anzahl der Einsen in Relation gesetzt mit der Anzahl der Schüler in jeder Klasse. „Was wäre, wenn 100 Schüler in jeder Klasse gewesen wären?"

→ Klasse 7a: $\frac{5}{20} \cdot \frac{5}{5}$ (Erweitert mit 5) $= \frac{25}{100} =$

$= 25\,\%$

=> In Klasse 7a hatten 25% der Schüler die Note 1.

-> Klasse 7b: $\frac{6}{25} \cdot \frac{4}{4}$ (Erweitert mit 4) =

$= \frac{24}{100} = 24\%$

=> In Klasse 7b hatten 24% der Schüler die Note 1.

Im relativen Vergleich gab es also in Klasse 7a mehr Einser als in Klasse B.

Anmerkung:

Lässt sich der Nenner nicht auf 100 erweitern, verwendet man für die Rechnung den Divisionsalgorithmus.

Beim nächsten Schritt sollen die Schüler einen Bezug der Prozentrechnung zum täglichen Leben erfassen, nämlich durch die Begriffe „vermehrter Grundwert" und „verminderter Grundwert". Hierbei ist eine Beispielaufgabe aus dem täglichen Leben sinnvoll, z. B das Berechnen von Mehrwertsteuer und Skonto.

Beispielaufgabe:

Eine Ware kostet ~~im Handel~~ 200 Euro.

Wieviel kostet die Ware, wenn man 19% Mehrwertsteuer dazurechnet, aber 3% Skonto wieder abzieht durch Barzahlung?

Über den Dreisatz gelangt man zu dem Ergebnis, dass die Ware 230,86 Euro kostet. Für die Herleitung der Formel für den vermehrten/verminderten Grundwert muss man die Gleichungsform wählen:

$P = G \cdot q$ (Prozentwert)

im Beispiel: ~~Bz~~ $P = 200€ \cdot 19\% = 200€ \cdot 0{,}19 = 38€$. Der vermehrte Grundwert ist der Grundwert, addiert mit dem Prozentwert

$\Rightarrow G_+ = G + P = G + G \cdot q = G(1+q)$

Im Beispiel: $G_+ = 200€ (1+0{,}19) = 200€ \cdot 1{,}19 =$

$= 238€$

Analog gilt das gleiche für den verminderten Grundwert:

$G_- = G(1-q)$.

Im Beispiel (Der Grundwert ist jetzt 238€): $G_- = 238€$

$(1-0{,}03) = 238€ \cdot 0{,}97 = 230{,}86€$.

3. Unterrichtseinheit zum Thema „Haushaltsplan einer Familie“ mit Prozentrechnung

a) Sachanalyse/Mathematische Analyse

b) Didaktische Analyse

a, und b, werden in den Teilfragen 1 und 2 ausführlich behandelt

c) Voraussetzungen bei den Schülern:

Die Schüler kennen bereits alle Grundbegriffe der Prozentrechnung un können auch bereits Prozentrechnung mittels Dreisatz und mittels Gleichung durchführen.

d) Einbettung in die Unterrichtssequenz:

Diese Stunde ist eingebettet am Ende der Unterrichtssequenz Prozentrechnung. Sie dient der Vertiefung des Gegenstandes Prozentrechnung und der Auseinandersetzung mit ~~komplex~~ umfangreicheren ~~en~~ Aufgaben in diesem Bereich.

Außerdem dient die Unterrichtseinheit dem fächerübergreifendem Unterricht ~~Überblick~~ in Bezug auf betriebswirtschaftliche Aspekte eines Einzelhaushalts (Thema in AWT).

~~e) Zielsetzung für die Unterrichtsstunde:~~

~~Grobziel~~

~~=> Die Schüler~~

e) Didaktische Reduktion:

Einschränkung: Berechnung der Aufgabe in ~~Einschränkung~~ Dreisatzform.

Die Schüler kennen zwar auch die Berechnung in Gleichungsform, im Bezug auf den Alltagsgebrauch der Prozentrechnung sollen sie aber in dieser Unterrichtseinheit den Dreisatz vertiefen.

f) Zielsetzung für die Unterrichtsstunde:

- Grobziel:

-> Die Schüler sollen das Prozentrechnen mit Dreisatz in lebensnahen Bereichen sicher anwenden können.

- Feinziele:

-> Schüler sollen die Bedeutung der Prozentrechnung im Alltag kennen.

-> Schüler sollen die ihnen bekannten Rechenarten sicher anwenden können.

-> Schüler sollen die Rechenregeln beherrschen.

-> Schüler sollen einen Einblick bekommen in die betriebswirtschaftlichen Aspekte eines Einzelhaushalts (Fächerübergreifend zu AWT)

g) Plan der Durchführung

Bei der Einleitung der Stunde empfiehlt es sich hier ganz kurz zur Übung, und um die Aufmerksamkeit zu gewinnen, einige kleine Kopfrechenaufgaben mündlich zu stellen, z.B. „Wieviel ist 10% von 75?" oder „Wieviel Prozent sind $\frac{3}{4}$?"

Nach dieser sehr kurzen Einleitung ist nun die eigentliche Einleitung der Stunde durch eine Problemstellung zu beginnen.

~~Hierbei kann man~~

Hierbei zeige ich zunächst eine Aufstellung eines Etatplans eines ~~Hau~~ Einzelhaushalts mittels Projektor und Folie. Diese sieht folgendermaßen aus:

„Ein Haushalt hat nach Abzug der Steuern und Abgaben inklusive Kindergeld 2100 Euro zur Verfügung. Die monatlichen Ausgaben der Familie setzen sich folgendermaßen zusammen:

- Miete, Strom und Heizung : 793 Euro
- Versicherungen : 125 Euro

- Kredittilgung : 150 Euro
- Kosten für Auto : 80 Euro
- Lebenshaltungskosten : ~~30%~~ $\frac{1}{3}$ des Einkommens "

Die Schüler haben nun die Gelegenheit, Fragen zu stellen, z. B. wenn etwas für sie unverständlich ist. Es sollten auch kurz die Begriffe Kredittilgung und Lebenshaltungskosten erläutert werden.

Danach folgt die eigentliche Problemstellung.

Ich teile ein Arbeitsblatt aus, auf dem genau diese Auflistung enthalten ist, aber zusätzlich 3 Fragestellungen auftreten:

1. „Wie hoch sind die Lebenshaltungskosten der Familie " in Euro " und in Prozent?"
2. „Wieviel Prozent des Einkommens bleiben ~~am~~ im Monat übrig für eine Überweisung aufs Sparbuch?"
3. „Die Familie möchte nächstes Jahr in den Urlaub fliegen. Das kostet 3780 Euro. Wieviel Prozent des Einkommens müsste die Familie jeden Monat sparen, um nach 1 Jahr ~~dies~~ den Betrag von 3780 Euro auf dem Sparbuch zu haben?"

Zur Problem~~bees~~arbeitung sollen die Schüler in Kleingruppen von 3-4 Schüler die 3 Aufgaben berechnen. Ich habe dabei eine beratende Funktion, indem ich den Schülern bei den Berechnungen in den Gruppen helfe, falls nötig.

~~Berechnung der Aufgaben~~

Wichtig ist ~~hierbei~~ noch der Hinweis, dass die Schüler die Aufgaben mittels Dreisatz lösen sollen. Eine entsprechende Aufgabe auf dem Arbeitsblatt ist sinnvoll.

Berechnung der Aufgaben:

1. $2100 \mathrel{\hat{=}} 100\,\% \quad : \quad \frac{1}{3} = 33{,}\bar{3}\,\%$

$21 \mathrel{\hat{=}} 1\,\%$;

$700 \mathrel{\hat{=}} 33{,}\bar{3}\,\%$;

Die Lebenshaltungskosten der Familie betragen 700 Euro im Monat.

2. $793\,€ + 125\,€ + 150\,€ + 80\,€ + 700\,€ = 1848\,€$

$2100\,€ \mathrel{\hat{=}} 100\,\%$

$21\,€ \mathrel{\hat{=}} 1\,\%$

$252\,€ \mathrel{\hat{=}} 12\,\%$

Es bleiben 12% des Einkommens im Monat fürs Sparbuch übrig.

3. $3780\,€ : 12 = 315\,€$

$2100\,€ \mathrel{\hat{=}} 100\,\%$

$21\,€ \mathrel{\hat{=}} 1\,\%$

$315\,€ \mathrel{\hat{=}} 15\,\%$

Die Familie müsste jeden Monat 15% des Einkommens sparen.

~~Eine~~ Anmerkung:

Eine andere Variante der Aufgabe 3 könnte folgendermaßen aussehen:

„Die Familie müsste jeden Monat 15% sparen, um nach 12 Monaten in den Urlaub fliegen zu können. Wie teuer ist der Urlaub?"

Nach einer gewissen Zeit sollten die Schüler die Aufgaben bearbeitet haben und ich kann somit zur Problemlösung übergehen.

Ich rechne die Aufgaben gemeinsam mit den Schülern an der Tafel.

Die Gruppen sollen dabei Ergebnisse mit der Tafelanschrift vergleichen und gegebenfalls verbessern.

Zur Ergebnissicherung wird das Arbeitsblatt mit den Aufgaben und den Lösungen ins Matheheft eingeklebt.
Zur weiteren Anwendung gebe ich den Schülern nun am Ende der Stunde als Hausaufgabe eine ähnliche Aufgabe mit anderer Fragestellung. Diese soll bis zur nächsten Stunde gelöst werden.
Die Aufgabe ist entweder auf einem neuen Arbeitsblatt, oder aus dem Schulbuch, falls hier eine geeignete verzeichnet ist.

~~4. a)~~

~~Der Grundwert~~

4.a) Der Grundwert wird hier erst vermehrt, danach wieder gemindert. Die Minderung bezieht sich dabei auf den neuen Grundwert, der nach der Vermehrung entsteht.

Beispiel: $\cancel{G_0 = 40€}$

$\cancel{G_1 = 40€ \cdot 1{,}19 = 47{,}60€}$

$\cancel{G_2 =}$

$G_0 = 40€,\ q_1 = 19\% = 0{,}19;\ q_2 = 2\% = 0{,}02$

$G_1 = G_0 \cdot (1+q_1) = G_0 \cdot 1{,}19 = 40€ \cdot 1{,}19 = 47{,}60€$

$G_2 = G_1 \cdot (1-q_2) = \cancel{40€ \cdot 0,}\ 47{,}60€ \cdot 0{,}98 = 46{,}65€$.

b) Der Grundwert wird hier zunächst um 4% vermehrt. Es entsteht ein neuer Grundwert, der dann um 5% vermehrt wird.

Beispiel:

$G_0 = 80€,\ q_1 = 4\% = 0{,}04,\ q_2 = 5\% = 0{,}05$

$G_1 = G_0 \cdot (1+q_1) = 80€ \cdot 1{,}04 = 83{,}20€$

$G_2 = G_1 \cdot (1+q_2) = 83{,}20€ \cdot 1{,}05 = 87{,}36€$

Vorsicht:

Der Schüler könnte denken, dass die ~~der~~ Erhöhungen erst um 4%, dann um 5% gleich sind mit einer Erhöhung von 9%. Doch die zweite Erhöhung bezieht sich auf einen anderen Grundwert.

c) Der Grundwert wird hier zuerst um 5% vermehrt.

Es entsteht ein neuer Grundwert. Von diesem neuen Grundwert sollen nun 5% abgezogen werden, er soll also um 5% vermindert werden.

Vorsicht:

Diese Aufgabe birgt die Gefahr, dass der Schüler denkt das Endergebnis sei gleich dem Grundwert, da erst 5% dazu kommen und dann 5% abgezogen werden. Die 5% Abzug beziehen sich aber auf einen neuen Grundwert.

Beispiel:

$G_0 = 25€ \; ; \; q_1 = 5\% = 0{,}05 \, , \; q_2 = 5\% = 0{,}05$

$G_1 = G_0 \cdot (1+q_1) = 25€ \cdot 1{,}05 = 26.25 €$

$\cancel{G_2 = G_1 \cdot (1+q_2) = 26{,}25 € \cdot 1{,}05 = 27{,}56 €}$

$G_2 = G_1 \cdot (1-q_2) = 26{,}25 € \cdot 0{,}95 = 24{,}94 €$

d) Auch hier wird zweimal der Grundwert vermehrt, wobei sich die zweite Vermehrung auf den neuen Grundwert bezieht, der durch die erste Vermehrung entstanden ist.

Berechnung des Grundwertes:

1. Möglichkeit:

$G_2 = 299€ \; ; \; q_1 = 10\% = 0{,}1 \; ; \; q_2 = 10\% = 0{,}1$

$G_2 = G_1 \cdot (1+q_2) \Rightarrow G_1 = \frac{G_2}{1+q_2} = \frac{299€}{1.1} = 271{,}82€$

$G_1 = G_0 \cdot (1+q_1) \cancel{= G_0}$

$\Rightarrow G_0 = \frac{G_1}{1+q_1} = \frac{271{,}82€}{1{,}1} = 247{,}11€$

2. Möglichkeit: Berechnung über die Zinseszinsformel:

$G_2 = 299€ \; ; \; q = 10\% = 0{,}1 \, ;$

Anzahl der Vermehrungen $n = 2$

$G_n = G_0 \cdot (1+q)^n$

$$\Rightarrow G_2 = G_0 \cdot (1+q)^2$$

$$\Rightarrow G_0 = \frac{G_2}{(1+q)^2} = \frac{299€}{1{,}12} = 247{,}11€$$

Vorsicht:

Auch hier besteht wieder die Gefahr, dass der Schüler davon ausgehen könnte, ein zweimaliger Aufschlag von 10% ist gleichbedeutend mit einem Aufschlag von 20%. Doch auch hier bezieht sich der zweite Aufschlag auf den neuen Grundwert, der aus der ersten Vermehrung resultiert.

Besonderheit dieser Aufgabe ist, dass hier nicht nach dem vermehrten bzw. verminderten Grundwert gefragt ist, sondern nach dem ursprünglichen Grundwert.