Aufgabe 1

Vierecke lassen sich nach verschiedenen Eigenschaften klassifizieren. Erläutern sie eine Klassifizierung, in der die wichtigsten Viereckstypen auftreten.

Definition Figur:

Als Figur bezeichnet man eine nichtleere Teilmenge der Ebene. Geometrische Figuren, die einen Inhalt besitzen, werden von einer Linie umschlossen.

Definition Fläche:

Die Fläche einer Figur ist die durch die Begrenzungslinie eingeschlossene Punktmenge, wobei auch die Punkte, die auf der Linie liegen zur Fläche gezählt werden.

Flächeninhalt

Als Flächeninhalt bezeichnet man die Anzahl der Einheitsquadrate einer Fläche.

Viereck

Ein Viereck ist eine Figur der Ebene, die durch das Verbinden von vier Punkten A, B, C, D durch Strecken entsteht. Von den vier Punkten dürfen mindestens 3 Punkte nicht auf einer Geraden liegen. Die Strecken werden mit [AB], [BC], [CD] und [DA] bezeichnet.

Haus der Vierecke

Quadrat

Rechteck Raute (Rhombus)

gleichschenkliges Trapez Parallelogramm symmetrisches Drachenviereck

Trapez

Viereck & Vielecke

Im Haus der Vierecke tauchen die wichtigsten Viereckstypen auf.
Beginnend beim Quadrat spalten sich die Figuren nach ihren Eigenschaften, hauptsächlich der Symmetrieachsen auf.

Quadrat

Das Quadrat ist eine Figur der Ebene, die aus vier kongruenten Seiten besteht. Jeder Innenwinkel des Quadrats beträgt 90°. Benachbarte Kanten stehen demnach senkrecht aufeinander. Ein Quadrat besitzt vier Symmetrieachsen.

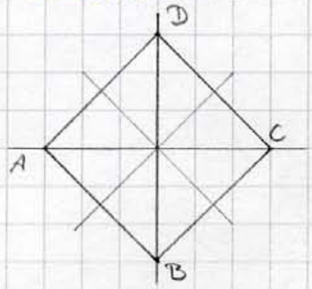
Rechteck

Ein Rechteck ist eine Figur der Ebene, deren Innenwinkel jeweils 90° betragen. Deshalb stehen benachbarte Kanten, wie beim Quadrat senkrecht aufeinander. Beim Rechteck sind die gegenüberliegenden Seiten paarweise parallel und Kongruent.

Ein Rechteck besitzt 2 Symmetrieachsen.

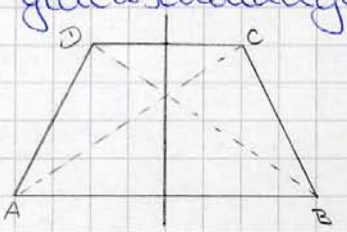
---- = Diagonalen

Raute




Eine Raute, die auch als Rhombus bezeichnet wird, ist eine Figur der Ebene, deren Diagonalen sich gegenseitig halbieren. Die Raute verfügt über 4 gleichlange Seiten und ebenfalls vier Symmetrieachsen.

gleichschenkliges Trapez




Ein gleichschenkliges Trapez ist eine Figur der Ebene, von der 2 Seiten parallel sind. Benachbarte Winkel eines Schenkels ergänzen sich zu 180°. Die Diagonalen eines gleichschenkligen Trapezes teilen sich immer im gleichen Verhältnis.

Ein gleichschenkliges Trapez besitzt lediglich eine Symmetrieachse.

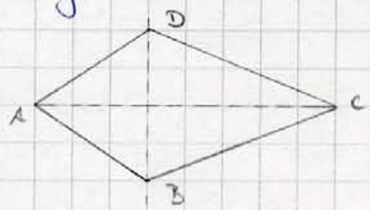
---- = Diagonalen

Parallelogramm


Ein Parallelogramm ist eine Figur der Ebene, bei der paarweise gegenüberliegende Seiten gleichlang und parallel sind.

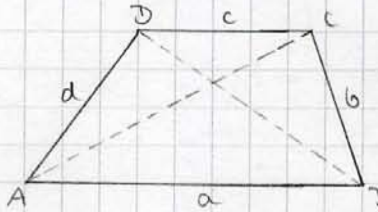
Ein Parallelogramm besitzt keine Symmetrieachse.

Symmetrisches Drachenviereck



Ein symmetrisches Drachenviereck ist eine Figur der Ebene, bei der eine Symmetrieachse durch eine Diagonale bestimmt ist. Das symmetrische Drachenviereck besitzt lediglich eine Symmetrieachse.

Trapez



Das Trapez ist eine Figur der Ebene, bei der zwei Seiten parallel sind. Die Diagonalen teilen sich immer im gleichen Verhältnis wie a : c.
Ein Trapez besitzt keine Symmetrieachsen.

Viereck

Definition vergleiche Seite 2
Ein Viereck besitzt keine Symmetrieachsen, wenn es sich nicht in ~~Hägli~~ eine der oben genannten Kategorien mit Symmetrieeigenschaften einordnen lässt.

Aufgabe 2a

Geben Sie verschiedene Definitionen für eine Raute an.

Raute

Eine Raute die auch als Rhombus bezeichnet wird, ist eine Figur der Ebene, deren Diagonalen sich gegenseitig halbieren. Ausserdem besteht eine Raute aus vier gleichlangen Seiten.

Ein Quadrat ist ebenfalls möglich als Raute zu bezeichnen, da auch ein Quadrat aus vier kongruenten Seiten besteht.

Aufgabe 2b

Für die Bearbeitung des Flächeninhalts einer Raute in der Hauptschule ergeben sich mehrere Möglichkeiten.

1. Möglichkeit

-> Schätzen

Um ein Gefühl für den Flächeninhalt einer Raute zubekommen, sollen die Schüler zunächst schätzen, welchen Flächeninhalt unterschiedliche, vorliegende Rauten haben könnten. Dazu erhalten die Schüler ein Arbeitsblatt, auf dem die Flächen von unterschiedlichen Rauten abgebildet sind. Zusätzlich ist eine andere Figur abgebildet, bei der es sich idealerweise nicht um eine Raute handelt, deren tatsächlicher Flächeninhalt angegeben ist. Die Schüler sollen nun anhand der gegebenen Parametern den Flächeninhalt der verschiedenen Rauten abschätzen. Für Leistungsstarke Schüler besteht die Möglichkeit der Differenzierung darin, dass ihnen keine Fläche als Orientierungshilfe vorgegeben wird.

2. Möglichkeit

-> direktes Vergleichen

Ähnlich der ersten Möglichkeit sollen die Schüler nun den möglichen Flächeninhalt von unterschiedlichen Rauten anhand einer vorgegebenen Vergleichsgröße, bei der es sich nun um eine Raute handelt, abschätzen. Dabei besteht die Alternative, dass die Figuren auf kariertem Papier, ~~Mil~~ Milimeterpapier oder blanko Papier abgedruckt sind. Je mehr Hilfslinien, also Karos etc. gegeben sind, desto leichter fällt es den Schülern den Flächeninhalt einer „unbekannten" Figur zu bestimmen.

<u>3. Möglichkeit</u>

→ indirektes Vergleichen durch Auslegen

Nachdem die Schüler schon eine Vorübung des Abschätzens durchgeführt haben, sollen sie den Flächeninhalt der Raute nun anhand des Auslegens mit Einheitsquadraten ermitteln.

Dazu zeichnen sich die Schüler eine vorgegebene Raute in ihr Heft. Die Raute soll deshalb bei allen Schülern gleich sein, damit sie ihre Ergebnisse des Flächeninhalts vergleichen und überprüfen können. Wenn die Schüler nun ihre Figuren gezeichnet haben, sollen sie im Anschluss aus kariertem Papier eine bestimmte Anzahl, vom Lehrer vorher ermittelt, an Einheitsquadraten (1cm · 1cm) ausschneiden. Die gezeichnete Raute soll nun mit den vorgegebenen Einheitsquadraten ausgelegt werden. Ist dies erfolgt, sollen die Schüler die Zahl der Einheitsquadrate ermitteln, was dann auch gleichzeitig den Flächeninhalt der Raute ergibt; Einheit sind $cm^2$. Die Schüler sollen ihre Ergebnisse untereinander ~~g~~ vergleichen. Nachdem die Schüler bemerken, dass es sich bei diesem Verfahren um einen sehr mühsamen Prozess handelt, eröffnet ihnen der Lehrer eine weitere Möglichkeit.

4. Möglichkeit

Als vierte Möglichkeit, die sich der 3. Möglichkeit stark ähnelt, wird dem Schüler das Vergleichen durch Zerlegen und Zusammenfügen veranschaulicht. Dabei sollen die Schüler eine Raute aus Papier ausschneiden. Durch Falten und anschließendes Zerschneiden sollen die Schüler die Raute in ihnen bekannte Teilfiguren zerschneiden, von denen sie den Flächeninhalt bereits berechnen können. Ebenso können die Schüler die ausgeschnittenen Figuren wieder so zusammenlegen, dass sie eine Figur bilden, deren Flächeninhalt sie bereits bestimmen können. Die Schüler sind bei dieser Methode unbedingt darauf aufmersam zu machen, dass sie beim Ausschneiden der Figuren unbedingt vorsicht und sorgfältig arbeiten müssen. Sobald sie von ihrer Raute etwas wegschneiden, kann der Flächeninhalt der ursprünglichen Figur schon nicht mehr mit der ~~a~~ neuen Figur übereinstimmen. Die gleiche Sorgfalt ist beim Zusammenfügen der neuen Figur geboten. Die Teilfiguren dürfen sich auf keinen Fall überlappen, da der Flächeninhalt auch hier von der ursprünglichen Fläche, der Raute, abweicht.

5. Möglichkeit

→ Berechnung

Den Schülern soll, wie bei allen anderen bisher behandelten Flächeninhalten im Mathematikunterricht, auch die Berechnung einer Fläche der Raute vermittelt werden.
Dazu müssen die Schüler aber zunächst die Eigenschaften einer Raute kennenlernen, nachvollziehen und beherrschen können. Ist dies der Fall, kann man ihnen die Flächenformel an die Hand geben.

$$\boxed{A_{Raute} = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f}$$

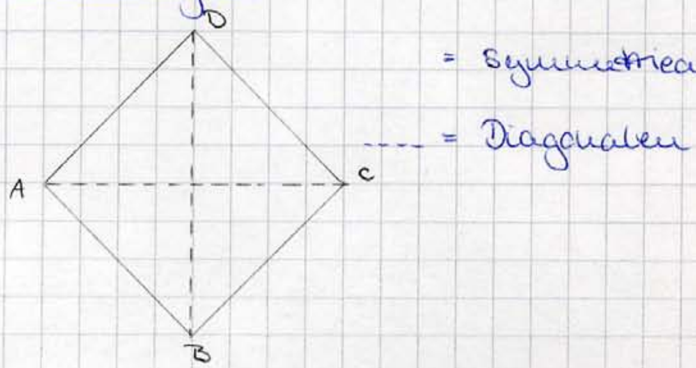
Mit e beziehungsweise f bezeichnet man in einer Raute die beiden Diagonalen. Diese halbieren sich gegenseitig.
Die Schüler sollen nun mit der Formel vertraut werden und sie anwenden. Dies soll zunächst nur in der Form geschehen, dass die Schüler Werte einsetzen und dann den Flächeninhalt berechnen.
Später soll dies erweitert werden, dass Schüler mit unterschiedlichen Einheiten rechnen sollen, also

diese umwandeln können, aber auch die Formel umstellen können müssen und nach anderen unbekannten Größen ~~umwandeln~~ auflösen.

Aufgabe 3

Entwickeln sie eine Unterrichtseinheit in der Eigenschaften der Raute erarbeitet werden.

Sachanalyse




Eine Raute ist eine Figur der Ebene, die durch vier kongruente Seiten bestimmt ist. Die spezielle Eigenschaft der Raute besteht darin, dass sich ihre Diagonalen, die mit e und f bezeichnet werden halbieren. Eine Raute besitzt vier Symmetrieachsen.

2 der Symmetrieachsen bilden die Winkelhalbierenden ~~für~~ der Winkel ∢ DAB; ∢ ABC; ∢ BCA und ∢ CDA. Die zwei anderen Symmetrieachsen bilden die Mittelsenkrechten auf die Seiten AB, BC, CD und ~~B~~ DA.

Die Mittelsenkrechten beziehungsweise die Winkelhalbierenden treffen sich im Mittelpunkt M. Dieser ist gleichzeitig Mittelpunkt für In- und Umkreis.

Schülervoraussetzungen

Die Schüler sollen aus den unteren Jahrgangsstufen Kenntnisse mitbringen über:

- Figuren und Flächen
- Flächenberechnung
- Vierecke
- Winkel bzw. Winkelhalbierende
- Diagonalen
- ~~Lot~~ Lot bzw. Mittelsenkrechte
- Kreis
- Symmetrie → Achsensymmetrie

Die angeführten Vorkenntnisse sollen teilweise aus den vorhergegangenen Jahrgangstufen als auch aus der laufenden Jahrgangsstufe bekannt sein.

Lehrplanbezug

Der Lehrplan~~bezug~~ für die bayrische Hauptschule sieht die Behandlung der Raute für die 7. Klasse vor. Dabei wird auf Inhalte der 5. bis 7. Jahrgangsstufe zurückgegriffen.

Grobziel

Die Schüler sollen die Eigenschaften der Raute kennenlernen.

Feinziele

Die Schüler sollen erkennen, dass die Raute

- 4 kongruente Seiten hat
- 4 Symmetrieachsen hat
- 2 Diagonalen hat, die sich halbieren

- einen Mittelpunkt hat, indem sich Diagonalen und Symmetrieachsen treffen.

Zeitplanung

Unterrichtseinheit: 45 Minuten

· Einstieg: ca. 8 - 10 Minuten

· Erarbeitung & Hinführung: ca. 25 Minuten

· Sicherung: ca. 10 Minuten

Einstieg / Motivation

In der ersten Phase sollen die Schüler zum Einen bekannte Begrifflichkeiten wiederholen, aber auch für das neue Thema motiviert werden.

Die Begrifflichkeiten von Figuren der Ebene sollen mit einem Spiel, das „Jeopardy" heisst wiederholt werden. Jedoch kämpfen die Schüler nicht ~~ff~~ einzeln gegeneinander, sondern im Team. Dazu werden die Schüler in zwei gleichgroße Gruppen eingeteilt.

An der Tafel werden Kärtchen verdeckt aufgehängt, auf denen sich Fragen befinden, die den „alten" Stoff nochmals aufgreifen sollen. Auf der Rückseite stehen für die Schüler ersichtlich Punktzahlen, die sie bei richtiger Beantwortung der Frage erhalten. Ziel ist es, so viele Punkte wie möglich zu sammeln und dadurch das Spiel zu gewinnen.

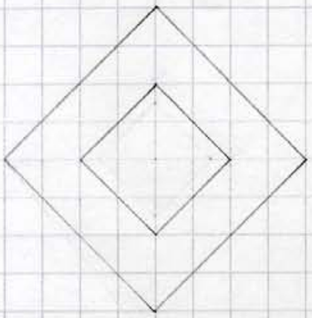
Wenn eine Gruppe die Antwort nicht weiß, hat der Gegner die Möglichkeit die Punkte zu erhalten.

Eine Mannschaft, die richtig antwortet, ist solange dran, bis ein Fehler kommt. Es wird solange gespielt, bis alle Karten weg sind beziehungsweise alle Fragen gestellt wurden.

Hinführung

Stiller Impuls

Der Lehrer legt eine Folie auf den Overheadprojektor auf dem das Verkehrsschild „Vorfahrtsstraße" zu sehen ist.



Der Lehrer wartet die Reaktionen und Erkenntnisse der Schüler ab. Diese werden feststellen, dass es sich um ein Verkehrsschild handelt, das aus zwei ähnlichen Vierecken besteht.

Aufgrund des vorangegangenen Spiels werden die Schüler auch erkennen, dass das Viereck irgendwie so aussieht wie ein Quadrat, dass alle Seiten gleich lang sind und dass die Figur mehrere Symmetrieachsen hat.

Der Lehrer fragt die Klasse, ob jemand weiß, wie die Figur heißt. Sollte dies nicht so sein, nennt der Lehrer das Thema der Stunde und schreibt es als Überschrift an die Tafel.

„Die Eigenschaften einer Raute"

Erarbeitungsphase

Die Schüler werden nun in sogenannte Expertengruppen eingeteilt, die sich mit bestimmten Eigenschaftsbe-reichen der Raute befassen sollen. Dabei sollen die Gruppen nicht größer als ca. 3 bis 4 Schüler sein, aber die Themenbereiche können beziehungsweise sollen sogar von mehreren Gruppen bearbeitet werden.
Die Eigenschaftsbereiche umfassen die Symmetrie, die Winkel und die Fläche.
Die Gruppen haben ungefähr 10 bis 15 Minuten Zeit die ihnen zugeteilten Eigenschaftsbereiche zu erarbeiten. Nach der Bearbeitungszeit sollen die Schüler einen Sprecher aus der Gruppe be-nennen, der die Ergebnisse an der Tafel, an einer angezeichneten Raute, erklärt. Zunächst werden die einzelnen Aussagen der Schüler nicht kommen-tiert. Erst wenn alle Gruppen ihre Erkenntnisse vorgetragen haben, wird über die Ergebnisse gesprochen. Richtige Eigenschaften werden an der Tafel durch einen grünen Haken gekennzeichnet. Falsche Aussagen werden kritisch betrachtet und erarbeitet, warum dies nicht der Fall ist. Schüler sollen ver-stehen, warum ihre Ansicht auf die Eigenschaften der Raute nicht zutrifft. Letztendlich soll an der Tafel stehen, dass eine Raute vier gleichlange Seiten hat, die kongruent sind; 4 Symmetrieachsen hat; 2 Diagonalen, die sich halbieren; Diagonalen und Symme-trieachsen sich im Punkt M schneiden; Innenwinkelsumme 360°;

bestehen aus 4 rechten Winkeln.

Sicherung

Die Schüler sollen zur Sicherung die Überschrift ins ihr Heft übernehmen und eine beliebige Raute dazu zeichnen.

Anschließend sollen sie von der Tafel alle Eigenschaften der Raute, die mit einem grünen Häckchen versehen sind in ihr Heft übernehmen.

Hausaufgabe

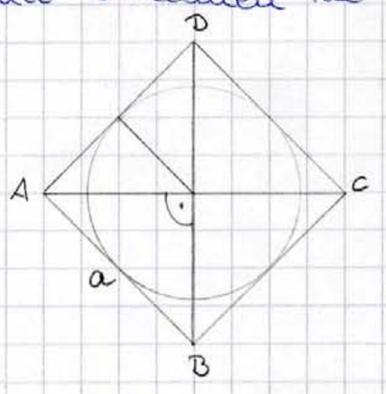
Zu Hause sollen die Schüler wachsam durch die Wohnung oder die Stadt gehen und aufschreiben, wo ihnen Rauten im täglichen Leben begegnen und sie damit konfrontiert werden.

Aufgabe 4

Wir betrachten eine Raute mit der Seitenlänge a und einen Innenwinkel $\alpha$.

Aufgabe 4a

Zeigen Sie, dass jede Raute einen Inkreis hat, und berechnen sie dessen Radius.




Seitenlänge a

$a^2 = \sqrt{2}^2 \cdot \sqrt{2}^2$

$a^2 = \sqrt{a}^2 \cdot \sqrt{a}^2$

$\sqrt{a}^2$ entspricht $\frac{e}{2}$ bzw. $\frac{f}{2}$

mit Hilfe des Satz des Pythagoras

$a^2 + b^2 = c^2$

$\Rightarrow a = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a}$

-> es ~~entspricht~~ entsteht aus Mittelsenkrechter und $\frac{e}{2}$ wieder ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypothenuse $\frac{e}{2}$ bzw.

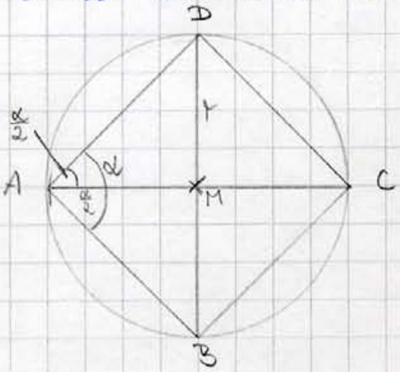
$$\sqrt{a}^2 = \sqrt{\sqrt{a}^2} \cdot \sqrt{\sqrt{a}^2}$$

$$\Rightarrow r = \frac{a}{2}$$

Aufgabe 4b

Rauten, deren Winkelhalbierenden sich in einem Punkt M innerhalb der Raute treffen besitzen einen Umkreis. Der Radius des Umkreises ist durch die Halbe Diagonale festgelegt.

Skizze zur Veranschaulichung




AC = Winkelhalbierende zu ∢DAB analog zu den anderen Winkeln

Diagonalen schneiden sich im 90°-Winkel => es entstehen 4 rechtwinklige gleichschenklige Dreiecke

- aus der Winkelsumme im Dreieck von 180° kann man folgern, dass die Diagonalen gleichzeitig die Winkelhalbierenden sind.

Aufgabe 4c

Mit dem Geometrieprogramm DynaGeo oder Cinderella kann man verdeutlichen, dass sich Rauten, wenn man sie an einem Eckpunkt streckt oder staucht immer eine Raute bleibt, deren Diagonalen sich halbieren. Die einzige Ausnahme besteht

darin, wenn man die Raute soweit staucht, dass die Seiten, also alle vier Seiten, so zur Deckung gebracht werden, dass sie sich auf einer Geraden befinden.
Wichtig ist, dass man die Raute an einem Eckpunkt staucht bzw. streckt. Dadurch verlängert sich eine Diagonale und die andere Diagonale wird im gleichen Verhältnis gekürzt.
Der Vorteil an der dynamischen Geometrie Software besteht darin, dass man ohne großen Aufwand experimentieren kann und auch Eigenschaften von Rauten überprüfen oder ermitteln kann.