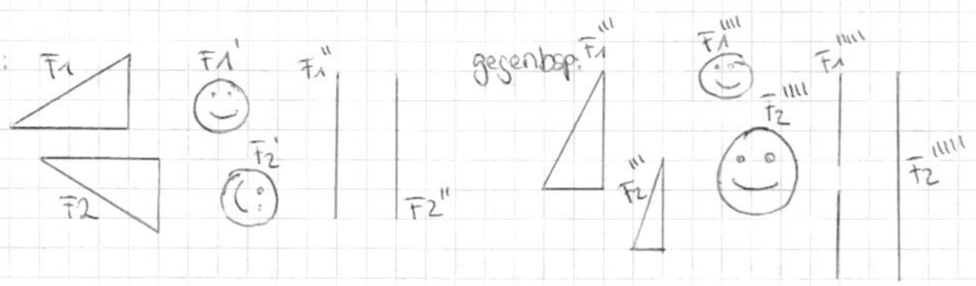
1. Deckungsgleich, zerlegungsgleich, ergänzungsgleich & inhaltsgleich sind Adjektive. Sie weisen Ebenen Figuren bestimmte Eigenschaften zu.

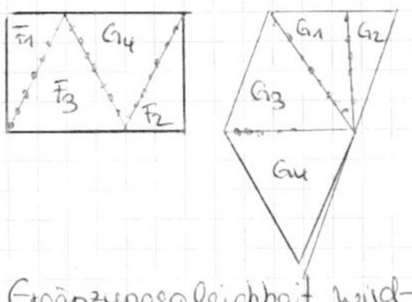
- "Deckungsgleich" entspricht "kongruent". Deckungsgleich sind Figuren der ~~Ebene~~ Ebene (des Raumes) wenn es eine Kongruenzabbildung K gibt die die Figuren aufeinander abbildet. Deckungsgleichheit (Eigenschaft) ist die Eigenschaft zweier Figuren, dass sie sich durch eine Achsenspiegelung, Drehung, Verschiebung, Punktspiegelung ~~&~~ ~~Scho~~ oder Schubspiegelung aufeinander abbilden lassen. Auch eine zentrische Streckung mit Faktor +1 oder -1 leistet dieses. Sind zwei Figuren F1 und F2 deckungsgleich schreibt man $F1 \cong F2$. Deckungsgleich zu sein bedeutet aus der Perspektive zweier Figuren weitere gemeisame Merkmale: geradentreue, paralellentreue, Winkeltreue & Flächeninhaltstreue und für alle Figuren die nicht durch Achsen oder Schubspiegelung auseinander hervorgegangen sind Orientierungstreue. Deckungsgleichheit ~~kann lass~~ lässt sich ~~durch~~ die Verkettung maximal dreier Achsenspiegelungen beweisen (Dreispiegelungssatz)

Bsp:

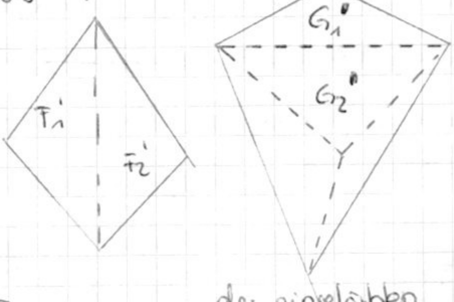


-> auch zerdeckungsgleich bezieht sich auf eine Eigenschaft, die zwei Figuren zugeschrieben werden kann. Lassen sich zwei Figuren F und G in einander entsprechend deckungsgleiche Teilfiguren zerlegen; also in $F_1, F_2, F_3 \dots F_n$ und $G_1, G_2, G_3, \dots G_n$ wobei gilt $F_1 \cong G_1, F_2 \cong G_2 \dots F_n \cong G_n$ so sind sie zerlegungsgleich. Sie lassen sich in n zueinander kongruente Teilfiguren ~~zerlegen~~ vollständig zerlegen. ~~Zerlegungsgleich ist eine bezeichnet die~~ Zerlegungsgleichheit (Eigenschaft) zweier Figuren ist verbunden mit der Eigenschaft Flächeninhaltsgleichheit. Da jede~~s kongruente~~ Teilfigur von F einer ihr zugeordneten Teilfigur von G in ihrem Flächeninhalt entspricht (eigenschaft der Deckungsgleichheit ist auch die Summe der Flächeninhalte aller Teilfiguren von F $(F_1 + F_2 + \dots + F_n)$ gleich der Summe aller Teilfiguren von G $(G_1 + G_2 + \dots G_n)$

Bsp:



gegenbsp:



Ergänzungsgleichheit wird ~~vor~~ z.B bei der Ableitung von Flächeninhaltsformeln angewendet.

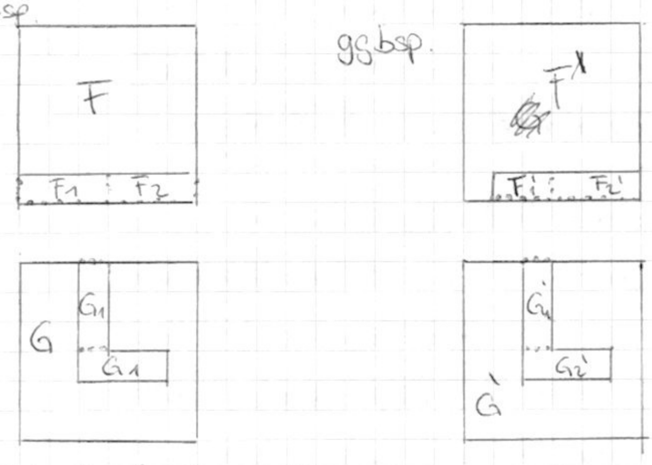
der eingefärbten Fläche von Figur G' entspricht keine Fläche der Figur F'.

Gleichermaßen hilft sie beim indirekten & direkten Vergleich zweier Figuren im Punkto Flächeninhalt.

→ Ergänzungsgleich ist eine Eigenschaft, die zwei Figuren F und G zugeschrieben ~~wi~~ wird, wenn es einander entsprechende Teil Figuren ~~F_{1-n} und G_1~~ $F_1, F_2, \dots F_n$ und $G_1, G_2 \dots G_n$ gibt (also $F_1 \cong G_1$) ~~durch~~ (welche zueinande kongruent sind) durch die die Figuren zueinander deckungsgleichen Figuren ergänzt werden können. Ist dies der Fall, so sind die Figuren F und G flächeninhaltsgleich. Ähnlich der Zerlegungsgleichheit wird die ~~G~~ Ergänzungsgleichheit verwendet um Flächeninhalte zweier (oder mehr) Figuren miteinander zu vergleichen. Darüber hinaus lassen sich mit d. Ergänzungsgleichheit Flächeninhaltsformeln ableiten. Es gilt wenn $F + (F_1 + F_2 + \dots F_n) = G + (G_1 + G_2 + \dots G_n)$ mit $F_1 \cong G_1$, $F_2 \cong G_2 \dots F_1 \cong G_n$. ~~$A(F) =$~~ dann $\underbrace{A}_{\text{Flächeninhalt}}(F) = A(G)$.

Bsp.

ggbsp.



Inhaltsgleich sind ergänzungsgleiche, zerlegungsgleiche und kongruente Figuren. ⇏ Inhaltsgleichheit ~~kan~~.

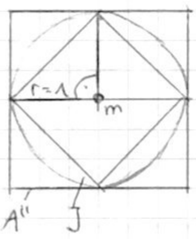
2 Figuren ~~sind inhalt~~ F und G sind ihaltsgleich wenn sie, ~~zerlegt man sie es in~~ gleich viele Einheitsquadrate (je nach Größeneinheit mm², cm², m², km² usw).

So können Figuren unterschiedlicher Form gleichen

Flächeninhalt besitzen. Dies lässt sich durch Kongruent- abbildungen und deren Verkettung sowie durch Ergänzung und Zerlegung der Figuren nachweisen.
Bei Ergänzung und Zerlegung können die einzelnen Teilfiguren, ~~welche~~ $F_1, F_2 \dots F_n$ und $G_1, G_2, \dots, G_n$ jeweils paarweise durch Kongruentabbildung als zentrischer Streckung mit Faktor ~~...~~ +1 oder −1 aufeinander abgebildet werden. ~~Dies ist z.B.~~ ~~eine anschau~~ für Flächeninhaltsgleiche ~~...~~ Figuren F und G ~~...~~ gilt $A(F) = A(G)$ (mathematische Schreibweise).

Bsp: siehe Bsp für ggBsp deckungsgleich zerlegungs und ergänzungsgleich ~~ggBsp~~.

2. Den Flächeninhalt eines Kreises kann man sich durch Annäherung durch ihm einbeschriebene und umschriebene Quadrate annähern: (siehe) Figur:

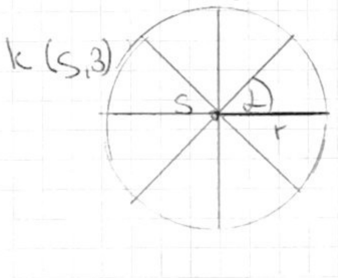


man sieht deutlich, dass der Flächeninhalt des Kreises "irgendwo" zwischen den Flächeninhalten der beiden Quadrate liegen muss. Schüler Schüler nehmen meist an, dass er genau die Hälfte der Summen beider Quadratflächeninhalte beträgt, also $\frac{A(\ddot{A}) + A(J)}{2}$. Durch Ausrechnen ergibt sich für das innere Quadrat unter Anwendung des Pythagoras:
$a = \sqrt{2}$, daher $A(J) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ für das äußere Quadrat erhält man ~~für~~ mit $b = 2$

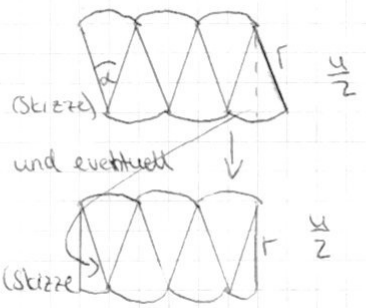
den Flächeninhalt $A(\hat{Q}) = 2 \cdot 2 = 4$
In die vermutete Formel eingesetzt, ergibt sich für den Flächeninhalt des Kreises $k(m, r = \frac{a}{2})$ der Flächeninhalt $A(k) = \frac{2+4}{2} = 3$. Dass dies lediglich eine Annäherung ~~ist zeigt die~~ muss die Lehrkraft in diesem Fall andeuten. Hierbei gilt es mit diesem Verfahren eine grobe Bildliche Vorstellung vom Flächeninhalt des Kreises zu entwickeln. Für die Umsetzung müssen bei den Schülern (S) die Anwendung des Pytagoras und die Berechnung ~~eines~~ des Flächeninhalts ~~des~~ eines Quadrats bekannt sein. Darüber hinaus muss eine grobe Vorstellung des "mitteln" zweier Werte (Größen, Zahlen) vorhanden sein um die verwendete Annäherungsformel zu verstehen. Positiv ist hierbei, dass die vorerst für die Schüler befremdlich wirkende Kreiszahl nicht gebraucht wird um den Flächeninhalt annähernd (dafür sehr anschaulich) zu errechnen. Durch Schätzungs- und Problemlösungsphasen sollen die S. selbst auf die Formel kommen.

- eine andere Art, welche genauere Werte für den Flächeninhalt liefert, ist die Zerlegung des Kreises in Sektoren. Diese ~~werden~~ sollen nur in einer Erarbeitungsphase so aneinandergelegt werden, dass sich der Flächeninhalt möglichst günstig ablesen lässt. Die S. arbeiten hier anschaulich und enaktiv mit Pappkreisen die sie zerschneiden und ~~[illegible]~~ deren Teile sie im Versuch eine gute Lösung zu finden (meint eine

Umsetzung in eine bereits bekannte Flächeninhaltsformel) aneinanderlegen. Wichtig bei diesem Verfahren ist, dass den Schülern bereits die Formel des Umfangs, sowie die darin enthaltene Kreiszahl π bekannt ist. Darüber hinaus ~~m~~ sollten sie in der Lage sein, den Kreis in gleichgroße Sektoren zu teilen. Dies setzt die Kenntnis über den Zusammenhang ~~α das~~ Vollwinkel des Kreises 360°, gleichgroße Winkel $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3 \ldots \alpha^n$ sind zu ermitteln indem der Vollwinkel durch die gewünschte Anzahl an Kreissektoren dividiert wird. Ist der Winkel errechnet, muss er (und die erfordert instrumentelle formale Fähigkeiten) nach und nach am Kreis (durch ~~Anlegen~~ passendes Anlegen des Geodreiecks) abgetragen werden. Bei diesem Verfahren wird das in 1 beschriebene Verfahren der Zerlegungsgleichheit angewendet, um den Flächeninhalt zu ermitteln. Nach Legeversuchen entwickeln die Schüler folgende Teil-Figurenkonstellationen:



Verwendet wird ein Kreis mit Radius r = 3. Durch 6-malige Teilung des Kreises ergibt sich für α das Maß 60°.



Die Schüle erkennen dass sie α für weitere Berechnungen nicht brauchen. Durch Verwendung der Umfangsformel $U = 2 \cdot r \cdot \pi$ und dem bekannter Radius $r = 3$ ergibt sich für den behandelten Kreis der Flächeninhalt über ~~Annäherung an~~ die Berechnung des Flächeninhalts eines Rechtecks, bzw. Parallelogramms: A (Rechteck / Parallelogramm) = a · b, in diesem Fall $r \cdot \frac{u}{2}$ · mit $A = r \cdot \frac{u}{2} = 3 \cdot \frac{\cancel{2} \cdot 3 \cdot \pi}{\cancel{2}} =$

$$= 3 \cdot 3 \cdot \pi = 9 \cdot \pi$$

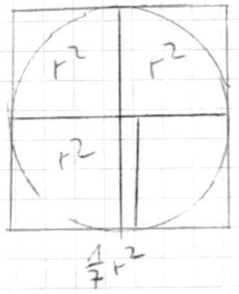
Der Kreis $k(S, r = 3)$ besitzt demnach den Flächeninhalt $9 \cdot \pi = A$ und damit 28,27 FE (FE = Flächeneinheit, in dem Fall cm^2). Verallgemeinert lässt sich sagen (für den Einheitskreis mit $r = 1$ gilt) $A = \frac{u}{2} \cdot \pi$. Somit erschließt sich dem Schüler auch der Zusammenhang zwischen Flächeninhalt und Umfang bzw. Radius.

Ist die Formel $A = \frac{u}{2} \cdot r = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{2} \cdot r$ anschaulich erarbeitet, so wird die verallgemeinerde Form der Flächeninhaltsformel durch Umrechnung (bzw. Vereinfachung) ermittelt:

$$A = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{2} \cdot r = r \cdot r \cdot \pi = r^2 \cdot \pi$$

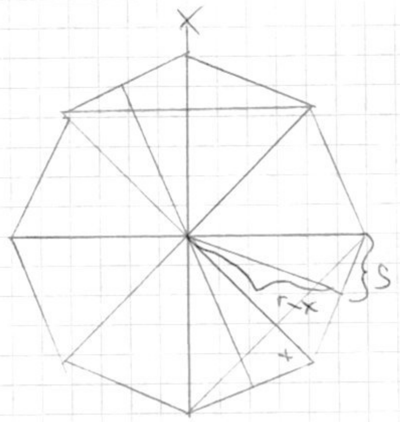
Nachdem dies nun bekannt ist ist es entscheidend, um ~~sich~~ die Formel nachhaltig ~~zu~~ erinnern zu können, eine bildliche Vorstellung aufzubauen. Ueber den genannten Möglichkeiten könnte ein solches Bild wie folgt aussehen:

$A = r^2 \cdot 3{,}14$
$= r^2 \cdot 3\frac{1}{7}$



ergänzend können einander einsprechende Rachenquadrate und Kreise aus Pappe gewogen werden um ~~einen exakten Vergleich~~ die Formen über exaktive Tätigkeiten zu bestätigen

(x) wird nun die Aufteilung in Sektoren immer feiner (~~Anzahl sektor → 0~~ $\lim_{\text{anzahl Sek.} \to 0}$
nähert man sich dem Flächeninhalt des Kreises beliebig nahe an



$\left(\frac{r}{2}\right)^2 = r^2 - (r-x)^2$ (Umstellen Pytagoras)

$\frac{r}{2} = \sqrt{r^2 - (r-x)^2}$
$= \sqrt{r^2 - (r^2 - 2rx + x^2)}$
$= \sqrt{-2r/x + x^2}$

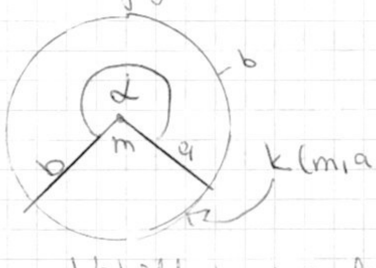
1

$$S^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 + x^2$$
$$= \left(\sqrt{-2rx + x^2}\right)^2 + x^2$$
$$= -2rx + x^2 + x^2$$
$$= -2rx + 2x^2$$
$$= 2x(-r + x)$$
$$S = \sqrt{2x(-r+x)}$$

u = Seitenlänge s · Anzahl der Seiten
$= \sqrt{2x(-r+x)} \cdot 12$
da $u = 2r \cdot \pi$ gilt $\pi = \frac{u}{2r}$ und
damit $\pi = \frac{\sqrt{2x(-r+x)} \cdot 12}{2r}$

3.

→ Didaktische Analyse:
der Flächeninhalt eines Kreissektors baut auf Kenntnissen über den Kreis auf (Flächeninhalts- Umfangsberechnungsformel, wichtige Linien z.B. Radius r, Bogenmaß b, Wissen über den Vollwinkel d. Kreises = 360°). Darüber hinaus sollten Kenntnisse über Winkel (deren messen und abtragen) bekannt sein. Der Kreissektor ist eine Teilmenge des Kreises, welche vom Bogen~~maß~~ b und ~~dem Winkel α~~ den Schenkeln a und b eines Mittelpunktswinkel α eingegrenzt wird (siehe Zeichnung).



~~Die Flächeninhalt~~ das Verhältnis von Flächeninhalt A_{sek} zum ~~mit~~ zugehörigen Mittelpunktswinkel entspricht dem Verhältnis ~~von~~ des Flächeninhalts ~~zu~~ des gesammten Kreises A_{Kr} zum Vollwinkel (= 360°) des Kreises also:

$\frac{A_{Sek}}{\alpha} = \frac{A_{Kreis}}{360°}$ und damit gilt für: den Flächeninhalt des Kreissektors:

$A_{Sek} = \frac{A_{Kreis}}{360°} \cdot \alpha$

Über Umformung und einsetzen der Teilformel des ~~Umfangs~~ Flächeninhalt ergibt sich für A_{Sek}:

$A_{Sek} = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360°}$ Um demnach den Flächeninhalt berechnen zu können müssen die S. Kenntnisse über die Teilglieder der Formel und bestenfall entsprechende anschauliche Vorstellungen vom Flächeninhalt des Kreises (siehe 2) besitzen. Die Formel muss nicht auswendig gelernt werden, es genügt, wenn die S. eine Vorstellung der der beschriebenen Verhältnisgleichheit haben um sie sich durch Umformung der Gleichung selbst herzuleiten. Über die Entwicklung der Flächeninhaltsformel kann die Vorstellung von Sektorflächeninhalt anschaulich abgeleitet werden. ($A(\triangle\triangledown) \hat{=} A(\bigcirc)$). Statt den vollen Kreis zu betrachten, lässt man entsprechend viele Sektoren beim Legen eines näherungsweisen Rechtecks weg, so ergibt sich automatisch, baut man dies wieder zum Kreis zusammen (da je ein Sektor fehlt) ein Kreissektor. Dies sollte in Anlehnung an das beschriebene Verfahren in zeitiger Nähe zu diesem ~~zu~~ (oder sogar nur kurz umrissen in der selben Stunde) geschehen. Wichtig ist auch hier die enaktive Handlung mit Pappkreisen und Pappsektoren. Diese kann man schrittweise ~~in~~ zur Zeichnung übernehmen und dann in Formelrechnen münden.

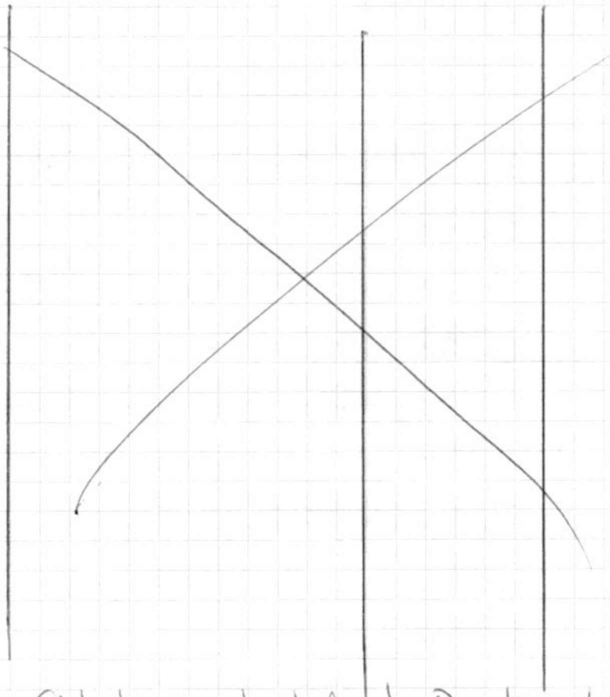
Unterrichtseinheit: Einführung in den Flächeninhalt des Kreissektors.

Ziele:
- S. sollen Kreissektor als Teilmenge des Kreises erkennen
- sollen Kreissektoren als von den Schenkeln des Mittelpunktswinkels α dem Bogenmaß begrenzte Fläche ~~erken~~ beschreiben können.
- Sollen aus enaktiver Handlung heraus den Flächeninhalt des Kreissektors als ~~ergänz~~ zerlegungsgleich zu einem entsprechenden Rechteck verstehen.
- sollen eine Beziehung zwischen Flächeninhalt und Mittelpunktswinkel des Sektors sowie ~~des radius~~ zwischen zeigen des Radius und Flächeninhalts herstellen.

S. sollen den Flächeninhalt des Kreissektors und seine Herleitung kennen und anwenden

Voraussetzung: Die in der didatischen-mathematischen ~~Voraussetzungen~~ Analyse beschriebenen Determinanten zum Verständnis des Kreissektors (Kreislehre, Winkellehre, instrumentelle Fähigkeiten) sind gegeben. Die Stunde folgt in direktem Anschluss an die Herleitung des Flächeninhalt des Kreises (siehe ~~...~~ 2.). Die dort verwendeten Pappscheiben werden ~~hierfür~~ verwendet um den direkten Bezug zum Kreis zu verdeutlichen

Einführung, Motivation



L: In der schuleigenen Backstube sollen für das kommende Sommerfest Waffeln gebacken werden in Form von Eistüten. ~~Wie sieht eine solche Waffel aus, wenn~~

„Wie wird eine solche Waffel gebacken?"

→ Schüler überlegen und machen Vorschläge:

Sie hat eine runde Öffnung, wird zu einer Tüte gerollt, usw. ...

L: Versuch aus Papier eine Eistüte zu basteln! Du kannst unterschiedlich große Eistüten ~~hierfür~~ wählen. Wie gehst du vor? ~~Mach dir zunächst klar, wie eine solche Tüte flach ab~~ überlege eine Strategie und bespreche sie mit deinem Nachbarn!

S: Überlegen, machen Skizzen, schneiden diese aus, rollen ~~Tüten. Und kleben diese~~ verschiedenen Tüten, kleben diese zusammen.

L: Zeigt eure "Papptüten" den anderen, was stellt ihr fest? Erkläre wie du vorgegangen bist? (Sitzkreis wird spontan auf Tischen gebildet) Lehrer moderiert, Schüler sprechen über ihre Vorgehensweise.

S: Stellen fest, dass unterschiedliche Tüten entstanden sind.

L: Woran kann das liegen? Schätze ab für welche Tüten man mehr Teig braucht. ~~du kannst~~ Roll hierfür deine Tüte auf ~~rollen~~ und vergleiche sie mit ~~den~~ anderen Tüten.

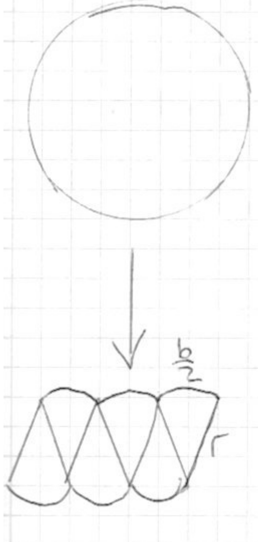
S: Stellen fest, dass der Radius und der Winkel ~~des~~ der aufgerollten Tüte voneinander abweichen. Dabei erfahren sie:

Je größer der Winkel der Tüte im aufgerollten Zustand, desto stumpfer ist die Tüte, je größer der Radius desto länger ist sie.

L: Wenn wir eure Tüten backen ~~wollten~~ wollten, wieviel Teig benötigen wir dafür wenn wir ihn ganz flach ausrollen. Wie könnte man das messen. Überlege!
zu zweit!

S: Überlegen sich eine Strategie:
- → auslegen mit Einheitswürfeln
- → zerschneiden in Sektoren
- → auf Kreis legen dessen Fläche bekannt ist und abschätzen wie viel Prozent ~~der Tü~~ die "flache Tüte" ausmacht

L: Stell deine Strategien vor! (Schüler berichten von ihren Ideen) Entscheidet euch für eine Idee! (wegen der Geläufigkeit des Verfahrens zur Kreisflächenberechnung aus der letzten Stunde entscheiden sich die Schüler für die Zerschneidung in kleinere Sektoren und legen diese aneinander. (am Platz) es ergibt sich folgende



Konstelation (nach aufteilen in gleichgroße Winkel ~~und~~ hierzu: ~~Tüte~~ messe Winkel der flachen Tüte und teile durch Anzahl der gewünschten Segmente & analog zum Kreis: Lehrer gibt hier falls nötig Hinweise)
dabei wird intuitiv erfasst dass analog zum Kreis nun eine Seite des Rechtecks statt Gesamtumfang das halbe Bogenmaß (wird später begrifflich konkretisiert) sein muss

~~Koch~~-L: ~~Kan~~ was stellt ihr fest?

S: leiten intuitiv Flächeninhalt her (ohne die „richtige Formel" zu kennen). Dabei erfassen sie den Kreissektor automatisch als Teilmenge des Kreises.

~~L: Miss nun dein Lehrer zeichnet~~ ~~große~~ nat großes ~~"Eistüte" in aufgerollter Form an die Tafel~~ Lehrer hat großes Modell einer "Eistüte" im ~~aufge~~ abgewickelter Form.

S. bilden Sitzkreis.

L: benennt Begriffe: "Den Rand der Tüte nennen wir nun Kreisbogen, die Klebekanten sind die Schenkel des Winkels eurer "Tüte". Diesen nennt man Mittelpunktswinkel. Die gesammte Tüte heißt Kreissektor. ~~Kater~~ Was habt ihr zur Berechnung benötigt?

S: den Radius und das Bogenmaß, S. erkennen auch das der Winkel entscheidend für den Flächeninhalt ist. (durch Vergleich der ~~Flächen~~ Kreissektorflächen von anderen

L: welche ~~Ber~~ Faktoren benötigst du also um den Flächeninhalt annäherungsweise auszurechnen?

S: Radius, Bogenmaß, ~~Kre~~ Mittelpunktswinkel des Sektors.

L: teilt Arbeitsblatt aus auf dem die wichtigsten Begriffe zum Kreissektor definiert ~~und~~ gezeichnet sind. Lücken werden ausgefüllt → Begriffe vom S. mit Farbe markiert und d. Begriff mit selber Farbe unterstrichen

S. dürfen nun entscheiden, welche Tütenform und Fläche die geeignetste zum Backen ist und die Skizze an "Backhelle" weitergeben.