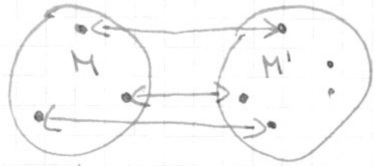
1. Erläutern Sie was man unter natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Zahlen versteht!
Gehen Sie dabei auf die ~~L~~ösbarkeit von Gleichungen ein!

Zahlen begegnen uns überall, nicht nur im Mathematik-unterricht müssen wir mit Zahlen umgehen. Doch Was ist eine Zahl? Welche Zahlen gibt es?
Diesen Fragen möchte ich im Folgenden nachgehen.
Ausgehend von den natürlichen Zahlen welche mit $\mathbb{N}$ bezeichnet werden, möchte ich die Zahlbereichserweiterung zu den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sowie zu den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ machen.
~~$\mathbb{R}$~~ An dieser Stelle sei nur kurz darauf hingewiesen, dass es auch noch die komplexen Zahlen gibt.
Zu den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$: Welche Aspekte haben die natürlichen Zahlen? ~~Die~~ Zahlen stiften Ordnung, der Erste, die Zweite, der Dritte usw. dies wird mit dem Ordinalzahlenaspekt definiert. Zahlen haben aber auch einen Codierungsaspekt so können z.B. Zu Ziffern folgen (Ziffern sind 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), explizit z.B. ~~Maßzahl~~ Telefonnummern als Namensersatz fungieren. Auch ~~dem~~ der Maßzahlaspekt ist ein wichtiger Aspekt so werden also Zahlen im Zusammenhang mit Einheiten oder (Größen) gebracht z.B. 1m; 5kg hierbei ist zu beachten ~~n E~~ $n \cdot E$ ($n \in \mathbb{N}$; $E \mathrel{\hat{=}}$ Einheit.

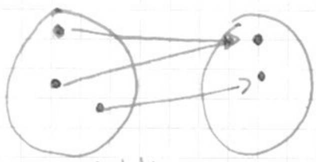
Über diesen Aspekt hinaus lassen Zahlen auch unter den Aspekt von „Operationen" betrachten. So werden also Eigenschaften definiert ~~welche dann~~ mit welchen dann „gearbeitet" werden kann. z.B. 5-3=2, das heißt z.B. die Subtraktion, Multiplikation, Division oder Addition.
Den letzten Aspekt von Zahlen welchen ich ausführen möchte ist der Kardinalzahlaspekt. ~~Zahlen wird die~~ Zahlen werden auf Mengen zurück geführt. Eine Zahl ist somit die Mächtigkeit einer Menge.

Diese drei Mengen haben gemeinsam, dass sie die Mächtigkeit 3 haben. D. Bei diesem Zahlenaspekt ist elementar die Mengenlehre.
Weil dieser Aspekt von tragender Bedeutung ist möchte ich näher auf diesen eingehen. Ich werde ~~auch~~ also in der weiteren Ausführung näher auf den Begriff der Gleichmächtigkeit eingehen. Die Gleichmächtigkeit von Zahlen ist eine Äquivalenzrelation, ~~sowie~~ zu dem kann festgehalten werden, dass wenn zwei Mengen die Gleichmächtigkeit besitzen eine Bijektion vorliegt. Eine Bijektion ist eine 1-zu 1-Zuordnung, d.h. sie ist surjektiv und ~~injektiv~~ injektive

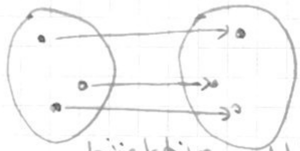
Folgende Darstellung soll die Begriffe veranschaulichen.



injektive Abb.

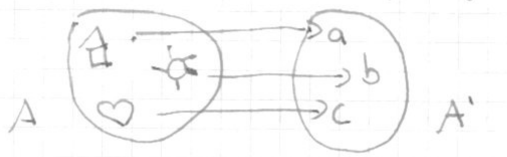


surjektive Abb.



bijektive Abb.

Um diese Abbildungsvorschriften mit einem Beispiel aus ~~denn~~ der Mächtigkeit (Gleich-) von Mengen abzuschließen sei dieses Beispiel genannt.



Es kann also jedem Element von A ein eindeutig ein Element von A' zugeordnet werden.
Die natürlichen Zahlen lassen sich also über die Gleichmächtigkeit d.h. $|A| = |A'|$ definieren. $|A| = \{(x, y, z), (a, b, c), (A, O, \square)\} := 3$. Mit dieser Vorstellung / Definition von Zahlen lassen sich auch Operationen beschreiben. Aus Zeitgründen möchte ich an dieser Stelle nur kurz auf die Addition eingehen. Sollte ich später noch Zeit haben ist es mir eine Freude auch noch die Multiplikation zu beweisen.

Die Addition zweier Mengen A, B,
wobei $|A| = x$ und $|B| = y$ und die Addition wie folgt definiert ist $|A| + |B| = |A \cup B|$ wobei $A \wedge B = \emptyset$.

Es kann gesagt werden das die Addition eine Äquivalenzrelation darstellt die also reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Das heißt: (sie Vor. oben. $x, y \in \mathbb{N}$)

+ reflexiv: ~~$a + a = a + b$~~ $x = x$ $\setminus |A| + |A| = |A| + |A|$
weil $|A| = |A|$

~~+ sym~~
+ symmetrisch: ~~$|B| + |A| = |B| + |A|$ $|A| + |B| = |A| + B$~~

$$|B| + |A| = \underset{\text{Komm.add.}}{a + a} = \underset{\text{MengenDef}}{a + b =} |B \cup \cancel{B} A| \underset{\text{Mengenlehre}}{=}$$

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

+ transitiv: wenn ~~$|B| + x + y$~~ $x = y$ und $y = z$
dann $x = z$

Zusammenfassend lässt sich also festhalten das die Menge der natürlichen Zahlen von der Eigenschaft der Gleichmächtigkeit von Mengen ausgeht.

Nach den Erläuterungen zu den natürlichen Zahlen, ~~welche~~
~~ich gerne noch weiter erklärt hätte folgt nun die nächste~~
ich ~~aus zeitlicher Not~~ möchte ich nun die erste
Zahlbereichserweiterung ~~f~~folgen lassen. Wenn die Eigenschaften
der ~~der~~ natürlichen Zahlen betrachtet werden muss
man feststellen, dass Gleichungen der Form $2+x=1$
unlösbar sind. Also allg. Gl. d. Form $a+x=b$ wobei
$a,b \in \mathbb{N}$ und $a>b$. Wir wollen also von unserem
jetzigen Wissen etwas Abstand nehmen und ganz
„unwissend" einen neuen Zahlenbereich beschreiten.
Die Konstruktion der ganzen Zahlen ist ~~pa proportiono~~
prototypisch und kann auf andere Zahlenbereichs-
erweiterungen übertragen werden.
Es wird also ~~davon Ausge~~ von einer ~~Menge~~ der Menge
der geordneten Paare (a,b) aus $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(a,b) \mid \in \mathbb{N}\}$ ausgegangen, diese geordneten Paare sollen durch ~~als~~
Äquivalenzrelation* folgende Eigenschaften definieren:
$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow (a+d = b+c)$:
* in die Klassen Summengleicher Paare zerlegen.

- ~~sym~~ refexiv: $(a,b) \sim (a,b)$ weil:
  $a+b = b+a$ Kommutativität der Addition
- symmetrisch: $(a,b) \sim (c,d)$ dann $(c,d) \sim (a,b)$
  $a+d = b+c = c+b = d+a = (c,d) \sim (a,b)$
- transitiv: $(a,b) \sim (c,d)$ und $(c,d) \sim (e,f)$
  $\Rightarrow (a,b) \sim (c,f)$

Es kann also festgehalten werden (a,b) und abkürzend möchte ich folgende Vereinbarung festhalten
$(0,a) \hat{=} a$, $(a;0) \hat{=} -a$ a und -a stellen somit die jeweilige Grenzzahl dar. $(0,0)=0$
Es werden dadurch 3 Bedeutungen von „-" deutlich

$$4 \overset{①}{-} (\overset{②}{-} (\overset{③}{-} 3)$$

① das Zeichen „-" als Operation der Subtration
② - die Gegenzahl der Zahl (3,0)
③ sowie die Abkürzung für das Zahlenpaar (3,0)

Wichtig ist auch, dass die Natürlichen Zahlen $\mathbb{Z}$ eingebettet sind eine Ausführung von oben lassen darauf schließen. die Zahl 3 ist durch (0,3) definiert so kann jeder ~~N~~ natürlichen Zahl eine ganze Zahl zugeordnet werden die sich genauso verhält wie die entsprechende Zahl in $\mathbb{N}$.
Die Zahlbereichserweiterung von $\mathbb{N}$ zu $\mathbb{Z}$ ist eine Bijektion jeder Natürlichen Zahl kann genau eine ganze Zahl zugeordnet werden.

~~Die Un~~

Die Unlösbarkeit der Gleichung $a \cdot x = b$ wobei $b < a$ motiviert zu einer weiteren Zahlbereichs-erweiterung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Q}$ die Menge der rationellen Zahlen, z.B. $\cancel{2}5 \cdot x = 3$. Diese Zahlen können unterschiedlich aufgefasst werden. Auch hier ist für die mathematisch einwandfreie Konstruktion des Bereiches $\mathbb{Q}$ wieder die Definition von Äquivalenz Klassen zu nennen. Darüber hinaus gilt es aber noch weitere Möglichkeiten dieses zu beschreiben. Ich möchte auf die mathematisch richtige Konstruktion eingehen (es seien hier nur noch die Konzept gerade für die berechnung* das Gleichungskonzept, Operatorkonzept und Größenkonzept genannt) * eine Rolle spielen:

Hier aber weil $\mathbb{Q}$ auch mehr als „nur Bruchrechnen" möchte ich auf das Äquivalenz Klassenkonzept ein-gehen.

Hier werden wieder den natürlichen Zahlen geordnete Paare aus $\mathbb{N}$ zugeordnet $\{ \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(a,b) \mid \in a,b \in \mathbb{N}\}$ wobei die Äquivalenzrelation die Paare in Klassen quotieren glei der Paare verlegt. $(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$

Hier gilt wieder die Relation reflexiv, symmetrisch transitiv ist.

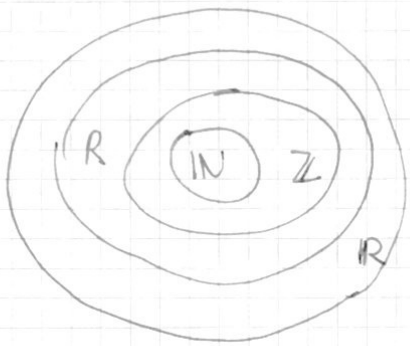
Es wird also die Menge von $\mathbb{Q}$ wie folgt definiert.

$\mathbb{Q} = \{ (a\ b) \mid a, b \quad b \in \mathbb{N} \} := \frac{a}{b}$

Dies soll veranschaulicht werden $\frac{a}{b} = \{(a,b);$
$(2;4);\ (1;2);\ (2;4);\ (4;3) \ldots\}$
Auch sind die Natürlichen Zahlen in $\mathbb{Q}$ eingebettet, dies ist von großer Bedeutung es kann also eine Funktion gefunden werden damit die die rationalen Zahlen in eine Zahl „verwandelt" welche sich $\mathbb{Q}$ <ab so verhält wie die entsprechende Natürliche Zahl $(n,1) = \frac{n}{1} = n$.
Zudem kann noch die Aussage getroffen werden das $\mathbb{Q}$ dicht ist.
Auch die Operation „·" „+" lassen sich definieren und stellen eine Äquivalenzrelation dar.

Den letzten Zahlenbereich welchen ich kurz ausführen möchte ist der Zahlenbereich $\mathbb{R}$, welcher durch die Unlösbarkeit der Gleichung $x \cdot x = a$ resultiert d.h. $x \triangleq 2$. ~~Hier~~ Es stellt sich heraus das die Lösung der Gleichung $x = |2|$ ist.

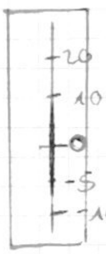
Folgende Skizze soll den Zusammenhang der Zahlenbereiche verdeutlichen. An dieser Stelle muss ich auch leider mit den ~~Auf~~ Ausführungen zu den Zahlenbereichen enden.



*1 von Seite 11: Ist für das Rechnen mit ganzen Zahlen nur die Idee von steigenden und sinkenden Temperaturen zu wenig.

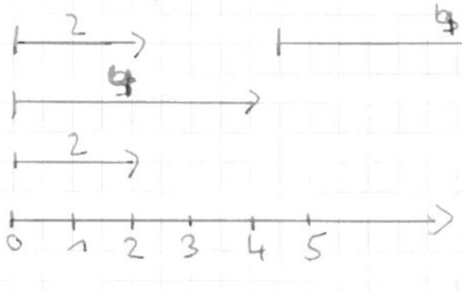
2. Diskutieren Sie verschiedene unterrichtliche Modelle für ganze Zahlen in Bezug auf ihre Tragfähigkeit für das Rechnen.

Hier sei zuerst das Termometermodell genannt. Es wird von der Lebenswelt der Schüler u. Schülerinnen ausgegangen. Es wird bei einem bekannten Sachverhalt angeknüpft. Die SchuSch bekommen eine Vorstellung wo sie in ihrer Lebenswelt mit ganzen Zahlen in Kontakt kommen.



Dieses Modell eignet sich hervoragent für die Einführung der ganzen Zahlen doch leider *1 Seite 10 ~~werden hier wichtige~~
z.B. die Temper. steigt um 5C° an ~~was wieviel~~.
Wie hoch ist die Tem. wenn die Temp. zuvor 10°C betragen hat. Doch bin ich hier der Meinung die Addition und die Subtraktion könnte man noch gut damit einführen doch schon bei der Division und Multiplikation scheitert dieses Konzept.
Ein weiteres Konzept was der Lebenswelt der SchuSch ist der Kontostand welche eben auch „minus" betragen kann. Der Ausspruch in den roten Zahlen ist den SchuSch ein Begriff.

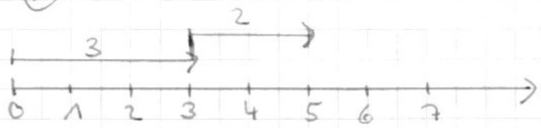
Doch hier ist zwar der Lebensweltbezug aber leider bleibt dieses Modell eher abstrakt.
Es können sich natürliche Fragen ergeben welche die SchuSch auf Grundlage dieses Modell lösen können. Z.B. Deine Mutter hat 5 € geliehen und deine Oma 5€. Wieviele Schulden hast du? Aber eine richtige Vorstellung von negativen Zahlen wird hierbei nicht vermittelt. Ganz anders ist es bei dem Pfeilmodell. Das Pfeilmodell ist mathematisch richtig und vermittelt eine Vorstellung von Zahlen am Zahlenstrahl. Wichtig bei diesem Modell ist es, dass sich die Lehrkraft viel Zeit für die Einführung nimmt. Jede Zahl kann bei dem Pfeilmodell als Pfeil auf einem Zahlenstrahl dargestellt werden. z.B. die Zahlen 2 u. 4



Die Pfeile werden auf den bzw. über dem Zahlenstrahl angetragen. Der zweite Schritt bei diesem Modell würde so aussehen, dass man ~~nur~~ nun Operationen folgen lässt. Zu erst die Addition, dann die Subtraktion und dann die Multiplikation als „vereinfachte" Addition. Hier muss die Lehrkraft mit den Schusch verbindlichen Vereinbarungen treffen. Z.B. bei der Addition trägt man den 2. Pfeil an ~~d~~ der Spitze des 1. Pfeils an. Hier ist auch auf die Def. / Klärung der Wörter „Spitze", „Anfang" usw. zu achten. Die Pfeiladdition könnte dann wie folgt erfolgen

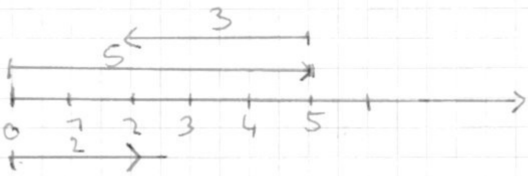
$3+2=5$

Beispiel 1



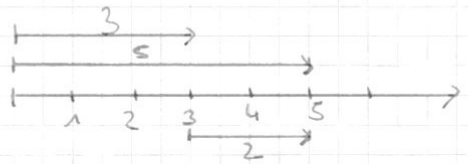
Das Ergebnis kann am Zahlenstrahl abgelesen werden, durch antragen des „Lösungspfeils"

Beispiel 2: Subtraktion: ~~5-2=3~~ 5-3=2



Bei der Einführung der Subtraktion ist es von enormer Bedeutung, klare Abmachungen mit den Schusch zu-treffen weil dies schon der erste Grundstein für die Einführung der ganzen Zahlen darstellt. Mein Beispiel von oben hätte auch auf anderer Weise zum Erfolg geführt.

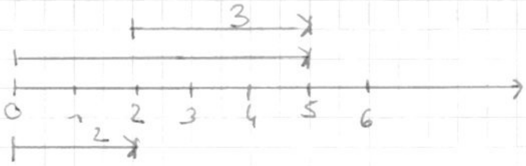
Beispiel 3 $5 - 3 = 2$



Ergebnis ist hier das Ablesen der Diverenz. Ich find die Abmachung / Vereinbarung Tragen den 1. Pfeil an ~~an~~ und trage ~~am~~ dann ~~die das Ende des 2 Pfeiles~~ die Spitze des 2 Pfeiles an die Spitze des 1. Pfeiles an auch für anschaulich.

Hier zu Verdeutlichung wieder das Beispiel 4:

$5 - 3 = 2$

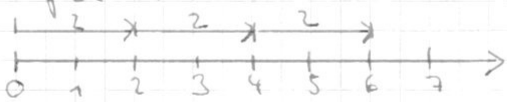


Das Ergebnis kann wieder abgelesen werden. Diese Vereinbarung macht deutlich, dass es auf die Pfeillänge ankommt. Die Multiplikation wäre die Zerlegung in eine Addition z.B.

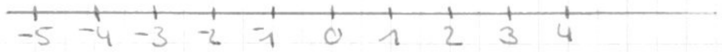
~~$3 \cdot 2 = 6$~~ $2 \cdot 3 = 6$

~~$3 + 3 = 6$~~ $2 + 2 + 2 = 6$

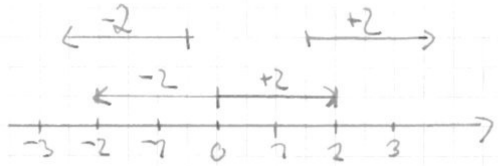
Beispiel 5:



Dann muss der Schritt erfolgen die ganzen Zahlen einzuführen also den Zahlenstrahl zu erweitern.



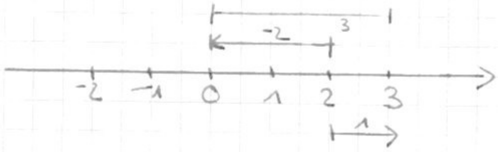
Hier kommt es auf die Zeit an die sich die Lehrkraft für die Einführung nimmt es wäre eine Möglichkeit durch bei beginn farbliche Unterschiede die negativen Zahlen deutlich zu machen.
Wie in Beispiel (2) ~~kön~~ bei der Subtraktion könnte also die negative Zahl aussehen die Spitze und der Anfang des Pfeiles o schauen in andere Richtung! Wichtig ist dann hier schon die Überlegung ob es sinnvoll ist bei der Subtraktion unter Beispiel (1) dies so einzuführen. Oder um eine wirkliche Vorstellung zu vermitteln zu sagen, dass natürliche Zahlen mit der Spitze nach rechts negative mit der Spitze nach links „schauen"
Beispiel 6:
Einführung der negativen Zahlen



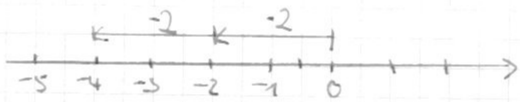
Hier kann dann auch gleich auf Zahl und Gegenzahl eingegangen werden!
Für die Einführung kann die Lehrkraft auch farbliche Vereinbarungen treffen um bei den SchuSch die anfängliche Vorstellung zu erleichtern -2 (negative Zahl = rot) und positive Zahlen blau.

Auch mit den negativen Zahlen kann nun Addition, Subtraktion, Multiplikation geübt werden.

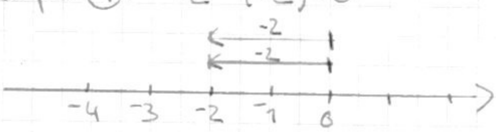
Beispiel 7: $-2+3=1$



Beispiel 8: $-2\cdot 2=-4$



Beispiel 9: $-2-(-2)=0$



Gerade Beispiele wie unter 9 sind von emenser Bedeutung. Wichtig ist wirklich die Zeit die man sich für die Einführung nehmen muss. Zu dem ist von großer Bedeutung die Sprechweise „Plus 2 minus 2 ist" das den Schusch die position und negativen Zahlen deutlich werden. Wichtig ist auch die Einbettung und Bedeutung der Null sowie Zahl- und Gegenzahl

Abschließend lasst sich also fest halten, dass für die Einführung der ganzen Zahlen auf jeden Fall der Lebensweltbezug der Schusch nicht fehlen darf Jedoch für die Tragfähigkeit des Rechnen das Pfeilmodell, das bedeutenste und mathematisch konkreteste Modell darstellt.

Wenn die Lehrkraft das Modell gezielt einsetzt und richtig einführt.

3. Entwickeln Sie eine Unterrichtseinheit zur Einführung der Subtraktion ganzer Zahlen.

I. Sachanalyse

Die Sachanalyse erfolgte in ① unter dem Pkt der Zahlenbereiche. Auch in Aufgabe ② wurde dazu Stellung genommen.

II. Lernvoraussetzungen:

Für die Einführung der Sub. ganzer Zahlen ist Vor. dass die SchuSch die Subtraktion der natürlichen Zahlen beherrschen. Zudem sollen die negativen Zahlen (das Pfeilmodell) schon eingeführt sein.

III. Lernziele

Die SchuSch sollen:

- die Fähigkeit erwerben ganze Zahlen zu subtrahieren
- das Wissen über ganze Zahlen wiederholen und vertiefen
- das Wissen über das Pfeilmodell und dessen Anwendungsmöglichkeiten auf die Subtraktion von ganzen Zahlen erweitern.

~~XI~~ IV. Didaktische und Methodische Anmerkungen:

Hier sei gleich voran gestellt, dass methodische Entscheidungen in der schulischen Realität von Klasse zu Klasse variert. Und Entscheidungen immer mit der jeweiligen Individuallage abgestimmt werden müssen Auch der Einsatz von Medien, Unterrichtsmitteln sowie die Sozialformen können sich stark unterscheiden welche Klassen es zu lehren gilt.

Wichtig bei der Erarbeitung dieser Unterrichtsstd. ist die Überlegung welche Inhalte den Schülern schwer fallen können und wie ich als Lehrkraft entgegenwirken kann. Es sei gesagt dass man sich immer daran halten soll vom Einfachen zum Schweren, zu ~~sch~~ schreiten. Auch sollten verschiedene Inhalte von ihrer Komplexität herausgelöst betrachtet und die Schwierigkeiten und Komplexität nach und nach ansteigen.

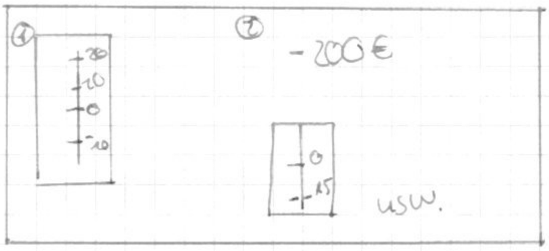
Im folgenden wird bei der Unterrichtsstd auf eine farbliche Unterscheidung von negativen und positiven Zahlen wertgelegt. Es sollen die negativen immer mit rot die positiven mit blau angetragen werden.

V. Verlauf der Unterrichtseinheit

a) Wiederholung

Die Schüler erhalten auf Folie verschiedene Darstellungen von neg. Zahlen. Auf dem Termometer, Konto~~auszu~~ausdruck (Kontostand)

z.B.:



Die Schüler werden aufgefordert die Zahlen, welche sie auf der Folie lesen können so schnell es geht ~~in~~ auf ein Blatt zu schreiben. Wer fertig ist steht leise auf. Dann wir verglichen.

Achtung: Lehrkraft muss auf Bezeichnungen achten: minus 10C°; minus -200 €.

Wer ein Ergebnis falsch hat setzt sich wieder hin.

b) Problem Hinführung:

Folie: Anna hat 5 Euro Schulden bei ihrer ~~e~~ Mutter, sie leiht sich 2 Euro von ihrer Oma

Weiter Problem Hinführung:

Wie ~~könnte~~ viel Euro ist Anna im Minus?

Löse die Aufgabe mit deinem Partner.

1. Durch überlegen (Tipp: Was heißt Schulden?)
2. Mit Hilfe des Pfeilmodell des letzten Std.

c) Problemstellung: Wie subtrahiert man negative Zahlen?

d) Problemerarbeitung: Jeder Schüler löst die Aufgabe in Partnerarbeit. Ergebnisse werden an einer Folie festgehalten. Das erarbeite Wissen wird festgehalten.

e) Vertiefung:

Die Schüler erhalten weitere Aufgaben welche nur in Einzelarbeit gelöst werden sollen.

Der 2. Schritt besteht darin, nicht nur negative Zahlen voneinander sondern von einer positiven Zahl eine negative abzuziehen und das gleiche umgekehrt.
Auch hier erfolgt die Erarbeitung wieder in Partnerarbeit. Die Lehrkraft achtet auf die farbliche Unterscheidung der Pfeile (dann zum ende hin aus weggelassen werden) Zudem auf korekte Formulierungen und einheitliche „Regeln" für das Antragen der Pfeile

Abschluss wäre nun vom Pfeilmodell Abstand zu nehmen und Aufgaben ohne Pfeilmodelle lösen zu lassen. Aufgabe wäre Rechne erst die Aufgabe $-2-3=(-5)$ und überprüfe das Ergebnis durch das Pfeilmodell nach und nach wird das Pfeilmodell nur als Gedächtnismodell benutzt. Die Schüler sollen dann ohne dieses Modell rechnen können.