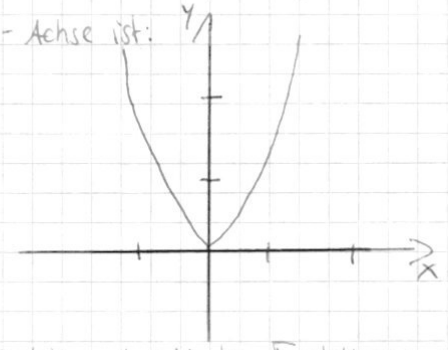
1. Eine Parabel ist eine quadratische Funktion der Form $fx = ax^2+bx+c$ mit $a \neq 0$.

Dabei ~~ist~~ stellt eine Funktion im Allgemeinen eine rechtseindeutige Relation $f: M \mapsto N$ dar, die einem Wert x der Menge M genau einen Wert y der Menge N zuordnet.

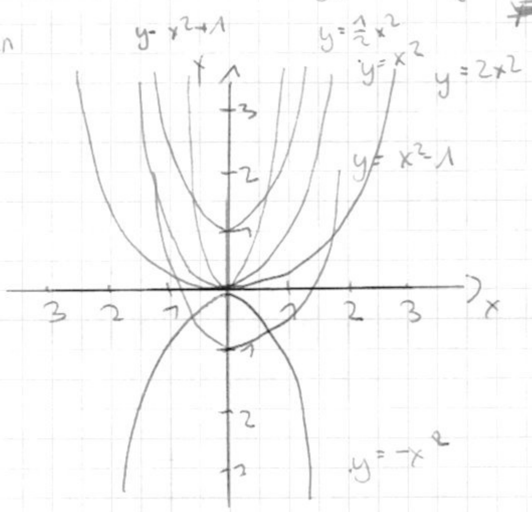
Eine Parabel kann verschiedene Gestalt haben:

Zum einen gibt es reinquadratische Funktionen. Das ist der Fall, wenn die Variablen b und c 0 sind. Der Spezialfall ist hier die Normalparabel $y = x^2$, die durch den Nullpunkt geht und auch achsensymmetrisch zur y-Achse ist:



Zum anderen gibt es gemischtquadratische Funktionen der Form $y = ax^2+bx+c$. Hierbei kann man unterscheiden je nach dem wie die Variablen a und c liegen: Wenn $a > 0$ ist, dann wird die Parabel gestreckt und sie ist nach oben geöffnet. Ist $a = 0$, was bei einer Parabel eigentlich nicht der Fall sein darf, da sonst keine Parabel mehr vorliegt, sondern eine lineare Funktion (falls $b \neq 0$ ansonsten nur die konstante Funktion $y-c$, Wenn $a < 0$ ist, liegt eine Stauchung der Parabel vor und sie ist nach unten geöffnet. Die Variable c bewirkt eine Verschiebung in y-Richtung. Entweder nach unten ins negative, wenn $c<0$ oder nach oben ins Positive, wenn $c \geq 0$

Die Variable b kann auch ein Verschiebung in y- und x-Richtung bewirken. Allerdings ist dies nicht so einfach an der Funktionsgleichung $ax^2 - bx + c$ abzulesen



Die Funktionsgleichung der Parabel kann auch in Scheitelpunktsform angegeben werden, die sich durch quadratische Ergänzungen aus der allgemeinen Funktionsgleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$ umformen lässt: $y = (x + x_s)^2 + y_s$

An dieser Form lässt sich ganz leicht der Scheitelpunkt der Parabel ablesen, nämlich $S = (-x_s, y_s)$. $x_s \neq 0$

2 a) Das beste Beispiel für eine Extremwertaufgabe in der Realschule ist die schon angesprochene Scheitelpunktsbestimmung. Da die Schüler der Realschule keine Funktionsgleichung höherer Potenz als 2 durchnehmen und kennenlernen im Rahmen des Mathematikunterrichts der Realschule, müssen sie also auch keine Extremwerte von Polynomen höheren Grades berechnen können, die meist nur durch Ableitung und Nullsetzen dieser

~~nur~~ durch Ableitung der Gleichung bestimmt werden können. Im Zusammenhang mit Parabeln, die immer nur einen Scheitelpunkt darstellt, kann man Schüler gut an solche Extremwert besitzen können heranführen.
Die Scheitelpunktsbestimmung, also die Bestimmung des Extremwerts, erfolgt durch quadratische Ergänzung.
Damit haben die Schüler aber oft Probleme, da sie Fehler machen wie Vergessen des Mittelteils der binomischen Formel (Vergessen, dass sie 2ab durch 2 teilen müssen, um auf b zu kommen), erkennen keine geeignete Zahl, die sie dazuaddieren und abziehen müssen, um auf b zu kommen), erkennen keine geeignete Zahl, die sie dazu addieren und abziehen müssen.
Das Problem ist auch oft, dass die Schüler keine Zusammenhänge zwischen ihren Rechnungen und dem Graphen der Funktion zeigen können.

b) Der wichtigste Grund für die Behandlung von Extremwertaufgaben in der Realschule ist eindeutig die Verknüpfung von algebraischen Rechnungen mit geometrischen Darstellungen. Da es wichtig ist bei der Bearbeitung eines Themas, dass es den Schülern enaktiv, ikonisch und symbolisch näher gebracht wird (also enaktiv, dass dies. selbst tätig werden und etwas ausprobieren oder basteln können, inkonisch, dass etwas veranschaulicht wird um besseres Verständnis zu erzeugen und symbolisch, dass die Formeln oder Konstruktionen etc. angewandt werden können), eignet sich dieses Thema gut, um vor allem ikonisch und symbolisch zu verknüpfen. Es werden sozusagen alle Sinne der Schüler angesprochen, denn sie können selbst die Graphen der Funktionen von Extremwertaufgaben zeichnen (durch Anlegen einer Wertetabelle) wodurch sie schließlich eine anschauliche Darstellung haben, von dem was sie rechnen sollen (den Scheitelpunkt Extremwert) Von Bedeutung ist dabei auch, dass sie ihre Rechnung (quadratische Ergänzung) anhand einer daran gezeichneten Parabel gut überprüfen können. Die Koordinaten des Scheitelpunkts können sie direkt im Koordinatensystem ablesen und gleich kontrollieren, ob die bestimmte Scheitelpunktsform dazu passt.

3. Zunächst muss man sich vor Durchführung einer Unterrichtseinheit Lernvoraussetzungen der Schüler und Lernziele dieser Unterrichtseinheit überlegen. Eine mathematische Sachanalyse ist bereits in Aufgabe 1 dargelegt worden. Zu den Lernvoraussetzungen gehören unbedingt der Umgang mit Graphen und Wertetabellen. Die Schüler können Wertetabellen zu gegebenen Funktionsgl. anlegen und den Funktionsgraphen dazu in ein geeignetes Koordinatensystem zeichnen. Die Schüler müssen Parabeln kennen und wissen, was bei Variation der einzelnen Parameter ~~[illegible]~~ a und c passiert. ~~[illegible]~~ Des weiteren ist eine wichtige Voraussetzung die Kenntnis und Anwendung der binomischen Formeln, da bei der quadratischen Ergänzung ~~sehr~~ immer die erster oder auch zweite binomische Formel $a^2+2ab+b=(a+b)^2$ $a^2-2ab+b^2=(a+)^2$ angewandt werden muss

Der Lernziele unterteilen sich in ein Grobziel und mehrere Feinziele. Das Grobziel der Unterrichtseinheit lautet: Die Schüler sollen den Scheitelpunkt und damit den Extremwert einer Parabel rechnerisch ermitteln und graphisch darstellen können.

Feinziele können dabei sein: Die Schüler sollen den Sinn einer quadratischen Ergänzung zur Extremwertbestimmung erfassen und selbst die quadratische Ergänzung einer vorgegebenen allg. quadratischen Funktionsgleichung vornehmen können. Die Schüler sollen anhand einer Scheitelpunktsform, einer Parabelgleichung den Extremwert ablesen können.

Bevor ich auf den Inhalt der UE eingehe, muss noch erwähnt werden, dass das Thema sehr komplex ist und die Schüler normaler Weise lange brauchen, um sich das Prinzip der quadratischen Ergänzung anzueignen. Deshalb möchte ich als Unterrichtseinheit hier eine Doppelstd. ansetzen, um auch die Zeit für Übung und graphische Veranschaulichung zu haben.
In der Durchführungsphase der Unterrichtseinheit beginne ich mit einem enaktiven Einstieg. Dabei wird die Klasse in 2 Gruppen eingeteilt und die Lehrkraft teilt Arbeitsaufträge für die Gruppen aus. In der ersten Gruppe lautet der Auftrag: Erstellt eine Wertetabelle zur Funktion $f(x) = x^2 + 2x + 3$ und zeichnet ihren Funktionsgraphen in ein geeignetes Koordinatensystem!
Die zweite Gruppe erhält im Endeffekt den gleichen Auftrag, nur mit der ~~ä~~ Funktionsgleichung in Scheitelpunktsform.
Erstellt eine Wertetabelle zur Funktion $f(x) = (x+1)^2 + 2$ und zeichnet ihren Funktionsgraphen in ein geeignetes Koordinatensystem!
Die zwei Gruppen sollen ihre Aufgaben jeweils auf Folie bearbeiten und am Schluss auf dem Overhead auflegen und vorstellen und es wird erkannt, dass beide Graphen identisch sind.
In der Problemstellungs- und -Lösephase wird nun in einem Unterrichtsgespräch ermittelt, wie man der einen Form auf die andere kommt.

Indem die Lehrkraft hier etwas lenkender eingreifen muss, macht sie klar, dass man rückwärts von der Form $(x+1)^2+2$ auf die ursprüngliche, den Schülern bekanntere Form x^2+2x+3 der Parabel, vorgeht. Die Schüler müssen also ihr Wissen zu binomische Formel auffrischen (was noch einmal kurz als Wiederholung aufgegriffen werden sollte) und diese anwenden, um auf die Form $x^2+2x+1+2$ zu kommen. Dabei erkennen die Schüler, ~~dass~~ beim Vergleich mit der Funktionsgleichung x^2+2x+3, dass sie nun bei der Umformung dieser in die Form $(x+1)^2+2$ eine "sinnvolle Null" also $+1-1$ addieren müssen, um die binomische Formel überhaupt anwenden zu können.

x S.3 Ausführlich erhält man eine allgemeine Scheitelpunktsform durch folgende quadratische Ergänzung:

$y = ax^2+bx+c$ (Ausgangsgleichung)

$y = a(x^2+\frac{b}{a}x)+c$

$y = a(x^2+\frac{b}{a}x+(\frac{b}{2a})^2-(\frac{b}{2a})^2)+c$

$y = a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{ab^2}{4a^2}+c$

$y = a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a}+c$

Dabei stellt $-\frac{b}{2a}=x_s$ dar, also der x-Wert, die x-Achse auf der der Scheitelpunkt liegt und $-\frac{b^2}{4a}+c=y_s$, also der y-Wert auf dem der Scheitel liegt.

Die Scheitelkoordinaten bekommt man deshalb so heraus bzw. kann sie direkt an der Scheitelpunktsform ablesen, weil man herausfinden

möchte, wann der Term $a(x+\frac{b}{2a})^2$ Null wird und dies ist genau dann der Fall, wenn $x=-\frac{b}{2a}$.
Insgesamt ergibt sich aus der Scheitelpunktsform der Extremwert und zwar für $a>0$ ein Minimum, da die Parabel nach oben geöffnet ist und der Scheitel dann der niedrigste Punkt ist und für $a<0$ ein Maximum, da die Parabel nach unten geöffnet ist und der Scheitel somit den höchsten Punkt darstellt.

*S4 In einem entwickelnden Unterrichtsgespräch verdeutlicht die Lehrkraft ~~nochmal~~ die Bedeutung der sogenannten Scheitelpunktsform $(x+x_s)^2+y_s$, indem sie ~~auf die Folie~~ nochmals die Folie mit den Graphen auflegt und die Schüler fragt, ob sie ~~etwas~~ die Lage der Parabel mit der Funktionsgleichung $(x+1)^2+2$ in Verbindung bringen können und ob sie an dieser F.gleichung besser erkennen können, wieso die Parabel so liegt. Allmählich sehen die Schüler die Abhängigkeit dieser Form zum Scheitelpunkt und erkennen, dass dessen Koordinaten in der Gleichung stehen.
Die Vorgehensweise der quadratischen Ergänzung und die Erkenntnis, wie diese mit dem Scheitelpunkt zusammenhängt wird nun in der Phase der Vertiefung wird ein Arbeitsblatt ausgeteilt, das in Partnerschaft bearbeitet werden soll.

Einzelne Aufgaben folgen dabei dem Prinzip "vom Einfachen zum Schweren":
Zunächst soll darauf der Begriff Extremwert kurz erläutert werden: "Den Scheitelpunkt einer Parabel nennt man auch Extremwert, da er die niedrigsten oder höchsten Wert einer Parabel darstellt."
Aufgabe: 1, Ermittle den Extremwert der Funktion:

$$f(x) = x^2 + 6x + 10$$

2, Versuche dabei herauszufinden, ob es sich dabei um ein Minimum (niedrigster Punkt Parabel) handelt!

~~Finde die~~ Welche Koordinaten hat der Scheitel der Funktion $f(x) = x^2$?

3) Wo liegt der Scheitel der Parabel $f(x) = 2x^2 + 2$?

4) Ordne die Graphen der Funktionsgleichungen zu
a) $f(x) = x^2 + 2$
b) $f(x) = (x-1)^2$

Nachdem die Schüler die Aufgaben bearbeitet und evtl. wegen Zeitmangels als Hausaufgabe machen mussten, sollten in der darauffolgenden Stunde diese neuen Begriffe "Extremwert", "Minimum" und „Maximum" nach schriftlich festgehalten werden und auch die Erkenntnisse der Schüler, dass die Zahl vorm x^2 (a) positiv sein muss, sodass der Scheitel ein Minimum ist und negativ sein muss, dass der Scheitel ein Maximum ist, also für $f(x) = ax^2 + bx + c$

~~also~~ gilt $a > 0$: Minimum
$a < 0$: Maximum

ins Heft eintragen werden sollte
Als Ausblick für spätere Stunden können schwierigere Aufgaben wie:
Welchen Scheitel besitzt eine Funktion mit den Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 5$?
gestellt werden.