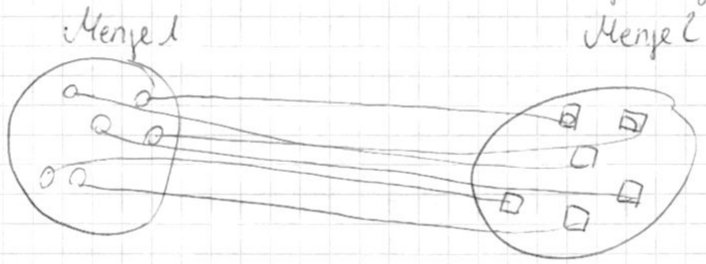
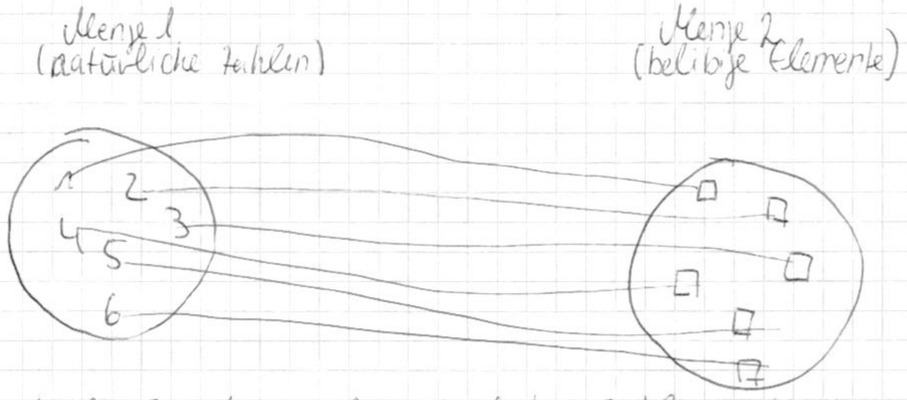
1.) Zur Definition der Addition und der Subtraktion kann man das Mengenmodell heranziehen. Dieses besagt, dass zwei Mengen gleichmächtig sind, das heißt gleich viele Elemente enthalten, wenn ~~sie~~ eine eins zu eins Zuordnung der Elemente der einen Menge auf die Elemente der anderen Menge möglich ist.



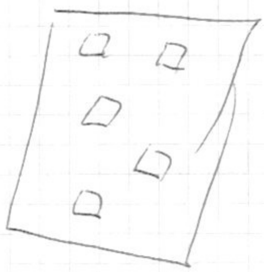
Nimmt man als eine Menge die natürlichen Zahlen und als andere Menge beliebige Elemente, ist ebenso eine eins zu eins Zuordnung möglich, wenn die beiden Mengen gleichmächtig sind



Durch die Zuordnung der natürlichen Zahlen auf die Elemente einer beliebigen Menge, kann man die Mächtigkeit dieser Menge bestimmen. Die Kardinalzahl einer Menge ist die zuletzt zugeordnete Zahl und gibt die Mächtigkeit der Menge an. Im obrigen Beispiel ist die Kardinalzahl der Mengen 6. Damit dieses Prinzip zur Bestimmung der Mächtigkeit einer Menge funktioniert, muss eine Eins-zu-Eins-Zuordnung eingehalten werden.

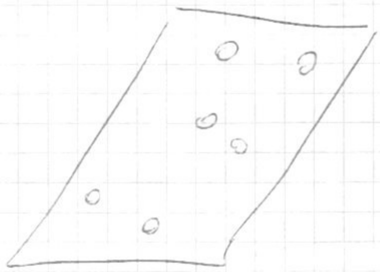
Außerdem muss das Prinzip der stabilen Ordnung gelten. Dieses besagt, dass die ~~X~~ natürlichen Zahlen in einer bestimmten Reihenfolge (1,2,3...) zugeordnet werden. Ansonsten kann nicht die zuletzt zugeordnete Zahl die Mächtigkeit der Menge bestimmen.
Bei der Addition werden zwei disjunkte Mengen vereinigt. Kein Element der einen Menge kommt also in der anderen Menge vor. Dabei ist a die Kardinalzahl der Menge A und b die Kardinalzahl der Menge B. Die Mächtigkeit der vereinigten Menge {A∪B} ist die Addition ihrer Kardinalzahlen.

Menge A



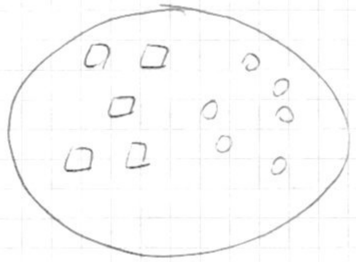
Mächtigkeit der Menge A = 5 Elemente = Kardinalzahl a = 5

Menge B



Mächtigkeit der Menge B = 6 Elemente = Kardinalzahl b = 6

Vereinigungs Menge A∪B

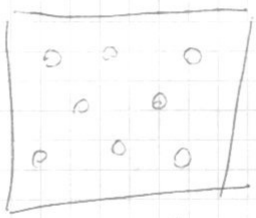


Kardinalzahl der Menge A∪B = 11 = Mächtigkeit der Menge = a+b = 5+6

Man addiert also die Kardinalzahlen zweier disjunktive Mengen, um die Mächtigkeit der Vereinigungsmenge zu bestimmen.

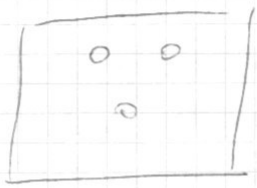
Bei der Subtraktion hat ~~k~~ man eine Menge A und eine Menge B. ~~Beide enthalten~~ Die Kardinalzahl der Menge A sei a und die Kardinalzahl der Menge B sei b. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sein vorausgesetzt $b < a$. Beide Mengen enthalten gleiche Elemente aber A enthält mehr Elemente als B. Um die Subtraktionsaufgabe $a-b$ zu lösen, zieht man die Menge B von der Menge A ab. Man bestimmt also die Mächtigkeit der Menge $A \setminus B$ (A ohne B). Die Kardinalzahl dieser Menge A ohne B ist das Ergebnis der Subtraktionsaufgabe $a-b$.

Menge A



Mächtigkeit = 8 Elemente
= Kardinalzahl $a = 8$

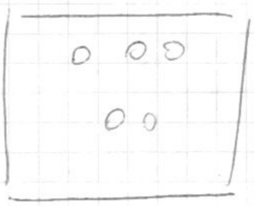
Menge B



Mächtigkeit = 3 Element
= Kardinalzahl $b = 3$

$b < a$ $3 < 8$

Menge A ohne B



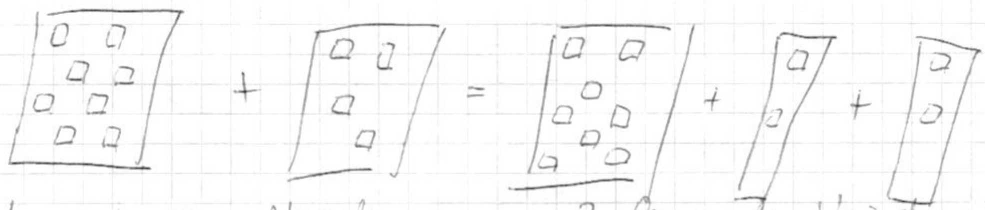
Mächtigkeit der Menge = 5 Elemente
Kardinalzahl $= 5 = 8-3$

Man streicht also diejenigen Elemente der Menge A die sowohl in A als auch in B enthalten sind. Die Kardinalzahl der neuen Menge ist das Ergebnis der Subtraktionsaufgabe a-b.

2) Grundsätzlich lassen sich unterschiedliche Arbeitsmittel zur Unterstützung der Addition und der Subtraktion im Zahlenraum bis 20 danach unterscheiden, welche Teilfähigkeiten sie unterstützen und welche Ziele sie verfolgen. ~~So lassen sich Steckwürfel besonders gut zur Einübung des Zehnerübergangs nutzen, wenn sie so gestaltet sind, dass immer nach 10 Steckwürfeln~~. So lassen sich Würfel und Stangen aus Holz besonders gut zur Einübung des Zehnerübergangs nutzen. Ein Holzwürfel stellt dabei einen Einer dar. Eine Stange steht für einen Zehner. Wenn die Schüler über den Zehner rechnen, müssen sie 10 Einer-Würfel in eine Stange umtauschen. Dabei üben sie den Vorgang des Bündelns. ~~Dabei~~ Umgekehrt lernen sie beim Subtrahieren ~~x~~ einer Zahl von einer zweistelligen Zahl bis 20 das Entbündeln, indem sie ihre 10er-Stange in Einer-Würfel umtauschen. Dieses Material bereitet insbesondere auch auf das Rechnen in größeren Zahlenräumen vor und wird später häufig auch bei den halbschriftlichen und schriftlichen Verfahren eingesetzt, so dass es sinnvoll ist, den Umgang mit diesem Material schon früh zu üben und einzuführen. Ein Nachteil des Materials ist, dass es nicht so flexibel ist. Die Schülerinnen und Schüler können beispielsweise so nicht

das Bündeln mit anderen Basiszahlen als der 10 üben.
Zudem wird das Umtauschen der Einer-Würfel in Zehnerstangen und umgekehrt bei größeren Zahlenräumen zunehmend aufwendig. Trotzdem eignet ~~es~~ sich dieses Material im Zahlenraum bis 20 gut zum üben und Verstehen des Zehnerübergangs.

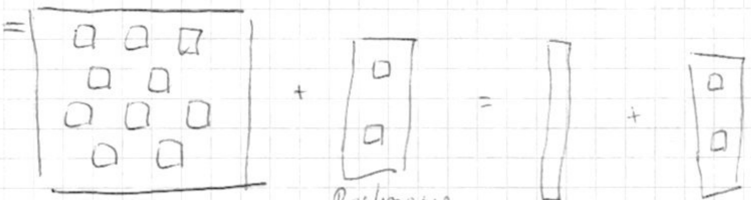
Beispiel: Würfel / Stange
Addition: 8+4



Ausgangsmenge 8 Würfel

Veränderungsmenge 4 Würfel

Zerlegung der Veränderungsmenge bis zum Zehner.

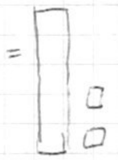


Rechnen bis zum Zehner

Restmenge 2

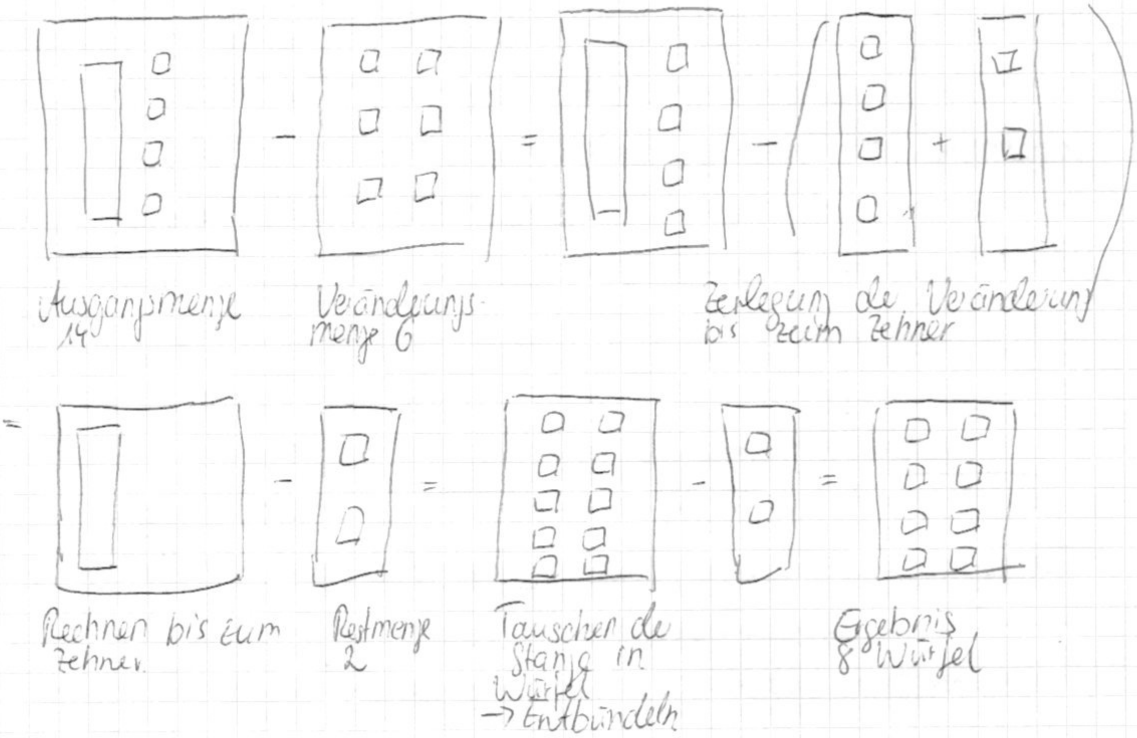
Tauschen der 10 Würfel in eine Stange → Bündeln

+ Restmenge 2



Ergebnis: 1 Stange und 2 Würfel = 12

Subtraktion: 14-16



Das Material eignet sich also besonders gut, um das Bündeln und das Entbündeln zu veranschaulichen.

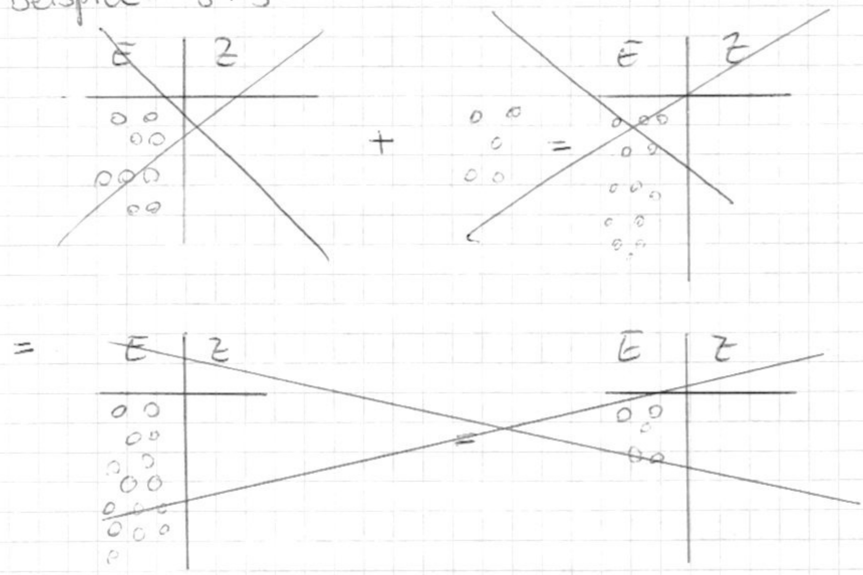
Ein ~~ähnliches~~ Material, das ebenfalls zur Veranschaulichung und Übung des Zehnerübergangs geeignet ist, sind Eierkartons mit leeren Überraschungseierkapseln. Hiermit kann eine Aufgabe (beispielsweise 5+9) so dargestellt werden, dass zunächst 5 Eier im Eierkarton sind. Dann bekommt ein Kind 9 Eier dazu. Es füllt den Eierkarton zunächst auf bis er voll ist (5+5=10) und stellt die restlichen Anzahl in einen neuen Eierkarton. Hierbei wird ebenfalls das Bündeln ~~und das Zerlegen eine~~ beim Zehnerübergang geübt. Zusätzlich gibt der Eierkarton aber noch eine Hilfestellung wie die Veränderungsmenge zerlegt werden muss, damit man zunächst zum Zehner und dann weiter rechnet.

Dieses Material sollte also noch vor den Holzwürfeln eingesetzt werden, da es noch mehr Hilfestellungen gibt. Zudem ist dieses Material sehr konkret. Die Holzwürfel hingegen sind schon etwas abstrakter. Zudem ist dieses Material sehr motivierend. Andererseits muss der Schüler hier kaum selbst etwas leisten, da er nur Eier hinzufügt. Deswegen sollte dieses Material nur zu Beginn der Einübung des Zehnerübergangs genutzt werden. Es lässt sich genauso auch für die Subtraktion verwenden. Auch hier wird der Zehnerübergang und vor allem das Zerlegen der Veränderungsmenge geübt. Vor- und Nachteile sind die gleichen wie bei der Addition.
Auch Spielgeld eignet sich um den Zehnerübergang zu üben, da auch hier getauscht werden muss. Allerdings ist Spielgeld nicht so flexibel, da es nicht alle Werte in Geldstücken bzw. Scheinen gibt. Zudem ist das Umtauschen von 10 1€ Stücken in einen 10€-Schein nicht unbedingt notwendig, wenn man addiert. Hingegen bei der Subtraktion wird die Notwendigkeit des Umtauschens, also ~~die Notwendigkeit~~ des Entbündelns, sichtbar, da beispielsweise 14€ (10€ Schein + 2€ Stück + 2€ Stück) - 6€ (2€ Stück + 2€ Stück + 2€ Stück) nicht ~~gerechnet~~ gelegt werden kann, ohne dass der Schüler den 10€-Schein entbündelt und umtauscht. Allerdings wird hierbei nicht so sehr das Zehnersystem betont, da auch 5€ zu einem 5€-Schein gebündelt werden. Dies könnte schwächere Kinder zunächst verwirren.

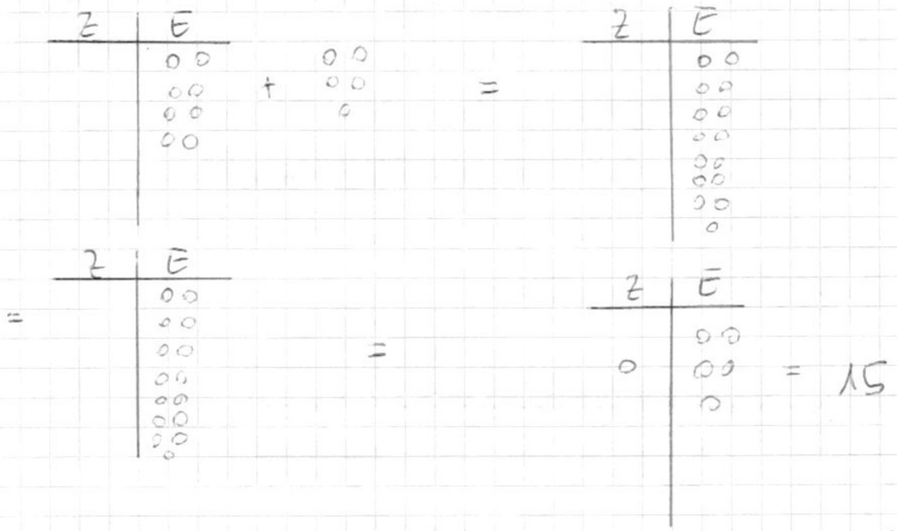
Geld eignet sich in besonderer Weise, um Ergänzungsaufgaben zu üben, da die typische Einkaufssituation mit Geld häufig eine Ergänzung beinhaltet. Hier kann zunächst die korekte Situation nachgespielt werden. Ein Schüler kauft bei seinem Nachbar 3 Äpfel für jeweils einen Euro und zwei Tafeln Schokolade für jeweils 2 €. Er zahlt mit einem 10€-Schein. Wie viel Geld bekommt er zurück? Zunächst können die Schüler diese Situation nachspielen und somit einen Bezug zu ihrer Lebenswelt herstellen. Später sollten sie dann abstrahieren und Sachaufgaben, die ähnliche Situationen enthalten, mit Hilfe von Spielgeld lösen. Hierbei wird vor allem das Zerlegen von Zahlen (10€, 5€, 20€) geübt, um das passende Wechselgeld herausgeben zu können. Zusätzlich zum Addieren und Subtrahieren üben die Schüler-innen und Schüler dabei den Umgang mit Geld und lernen die Geldwerte kennen. Insgesamt ist dieses Material aber nicht so flexibel.

Ein Material das speziell auf den Übergang über den Zehner abgestimmt ist, ist die Stellenwerttafel mit Plättchen. Hierbei liegt eine bestimmte Anzahl von Plättchen in der Einer-Spalte. Dann addiert man eine weitere Anzahl Plättchen hinzu, so dass mehr als 10 Plättchen in der Einer-Spalte liegen. Diese müssen die Schüler dann Bündeln und ein Plättchen für 10-Einer in die Zehner-Spalte verschieben.

Beispiel: 8 + 5

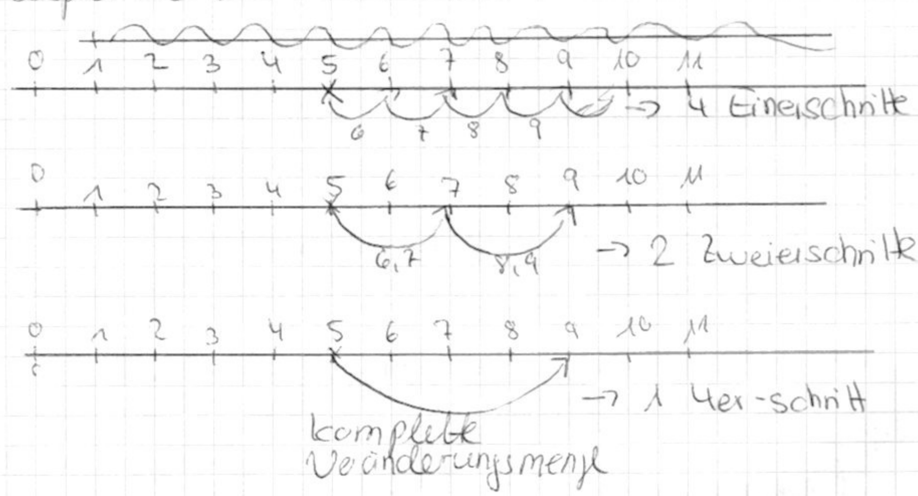


Beispiel: 8 + 5

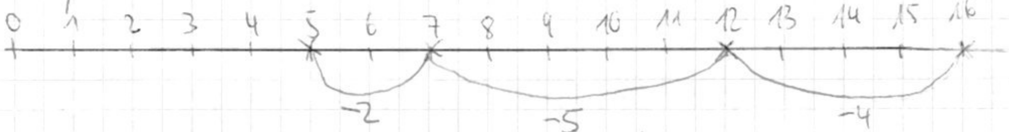


Dieses Material ist abstrakter als die Holzwürfel und -stangen, da Plättchen sowohl für Einer als auch für Zehner stehen können. Zudem müssen die Schüler hier selbst erkennen, was sie umwandeln müssen und wie viel dies ergibt. Dieses Material kann also als Fortführung der Holzwürfel verwendet werden. Vorteil ist, dass hier speziell die Stellenwertschreibweise geübt wird und es eine Vorbereitung auf die Addition und Subtraktion in

größeren Zahlenräumen darstellt. Zudem kann man von diesem Material gut zum materialfreien Rechnen übergehen, da die Plättchen durch Punkte ersetzt werden können und dann ~~g~~ nur mit Zahlen gerechnet werden kann. Für schwächere Schüler ~~ist~~ kann dieses Material zu Beginn des Zehnerübergangs aber noch zu abstrakt sein.
Am Zahlenstrahl lassen sich am Anfang der ersten Klasse einfache Additions- und Subtraktionsaufgaben verdeutlichen. Zunächst lösen die Schülerinnen und Schüler Additionsaufgaben durch Weiterzählen und Subtraktionsaufgaben durch Rückwärts zählen. Diese Veränderung kann gleichzeitig zum Sprechen am Zahlenstrahl gedeutet werden. Zunehmend gehen die Schülerinnen und Schüler dann dazu über in 2er-, 3er-, 5er-Schritten zu zählen. Auch dies lässt sich am Zahlenstrahl darstellen. In der Endform „springen" die Schüler dann um die Veränderungsmenge weiter.
Beispiel: 5+4



Der Zahlenstrahl kann also direkt zu Beginn der ersten Klasse eingesetzt werden. Er ermöglicht den Schülerinnen und Schülern ihren Rechenweg ihren individuellen Fähigkeiten anzupassen. Schwächere Schüler nutzen kleinere Schritte, stärkere Schüler „springen" gleich zum Ergebnis. Zudem hilft der Zahlenstrahl den Kindern sich im Zahlenraum bis 20 zu orientieren. Dazu können auch Übungen gemacht werden, bei dem die Schüler den ~~Fg~~ Finger auf einer Zahl haben und ~~der~~ die Lehrkraft oder der Nachbar geben Kommandos wie „zwei vor, fünf zurück, wo bist du jetzt? Gehe zur 19" um wieviel bis du vorgegangen?" usw.
Außerdem eignet sich der Zahlenstrahl um Aufgaben mit mehreren Summanden oder mehreren Subtrahenden darzustellen.
Beispiel ~~19 - 7 - 4 - 2~~ 16 - 4 - 5 - 2



Auch geschicktes Rechnen oder verschiedene Rechenwege lassen sich am Zahlenstrahl verdeutlichen. Ein Nachteil des Zahlenstrahls ist, dass er die Addition als Vereinigung von Mengen und die Subtraktion als Abziehen des Durchschnitts beider Mengen von der einen Menge~~n~~ nicht veranschaulicht. Diese Vorstellung geht bei diesem Arbeitsmittel verloren.
Auch zu Beginn der ersten Klasse lassen sich Spiele einsetzen, die einfache Additions- und Subtraktionsaufgaben enthalten. ~~Da~~ Ein Beispiel hierfür ist das Räuber- und Goldschatz-Spiel, bei dem es ein Spielbrett (AB) mit dem Weg von 1 bis 20 gibt

Hier sind viele verschiedene Spielvariationen möglich, so dass man sehr gut differenzieren kann und trotzdem alle Schülerinnen und Schüler am gleichen Spiel arbeiten. Schwächere Schüler spielen beispielsweise einfach die Variante, bei der es einen + - Räuber und einen Minusräuber gibt. Der eine zählt vorwärts, der andere ~~e~~ rückwärts. Dabei notieren sie die Additions- bzw. Subtraktionsaufgaben, die durch Würfel entstehen. Durch das Ziehen der Figur kommen sie einfach auf die Lösung. Stärkere Schüler notieren sich beispielsweise nur die Ergebnisse des Räubers und rechnen dann aus, was er gewürfelt haben muss. Dieses Material ist also vielfach einsetzbar und zusätzlich sehr motivierend für die Schüler. Andererseits kann hiermit aber nur die Rechenfähigkeit geübt werden. Zur Veranschaulichung oder als Hilfe für schwächere Schüler ~~x~~ ist dieses Arbeitsmittel nicht geeignet.
Mit Hilfe des 20er-Feldes lässt sich vor allem die Strategie der Tauschaufgabe verdeutlichen. Außerdem lassen sich hier auch unterschiedliche Rechenwege darstellen und geschicktes Rechnen üben. Dazu ist es wichtig, dass jeweils nach 5 Punkten ein Einschnitt ist, das also das Zwanzigerfeld ~~gut~~ übersichtlich strukturiert ist.

Beispiel: 9 + 3 = 3 + 9 (Tauschaufgabe)

Beispiel: geschicktes Rechnen: 8 + 5 + 2 = 8 + 2 + 5

Der Schüler sieht jedesmal, das es die gleiche Menge als Ergebnis ist. Das gleiche gilt auch für die Subtraktion

3.) Sachanalyse:

Die Addition und Subtraktion wurde bereits in Aufgabe 1 definiert. Die Aufgaben in der beschriebenen Stunde haben alle einen Zehnerübergang. Dabei ist das Zerlegen des 2. Summanden bzw. des Subtrahenden wichtig, so dass erst bis zu 10 und dann weiter gerechnet wird.

Lehrplanbezug: Der Zahlenraum bis 20 ist Thema der ersten Klasse. ~~Es~~ Insbesondere die Addition und Subtraktion bis 20 stellen einen wichtigen Teil des Erstklass-mathematikunterrichts dar. Dabei wird vor allem viel Zeit für das Erlernen des Zehnerübergangs aufgebracht.

Lernvoraussetzungen:

Die Schülerinnen und Schüler sind mit dem Zahlenraum bis 20 vertraut und können Additions- und Subtraktionsaufgaben bis 10 sicher lösen. Zudem haben sich bereits Additions- und Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 20 ohne Zehnerübergang geübt. Der Zehnerübergang wurde bereits eingeführt ~~und in 2 Schritte zerlegt~~. Die Schülerinnen und Schüler wissen, dass sie zunächst zum Zehner und dann weiter rechnen sollen. Die verwendete Schreibweise wurde bereits eingeführt.

~~Das Bündeln und Entbündeln ist bereits bekannt und soll jetzt geübt werden.~~

Ziele: Grobziele: - Die Schülerinnen und Schüler sollen die Addition und die Subtraktion mit Zehnerübergang üben.

Feinziele: - Die Schülerinnen und Schüler sollen den zweiten Summanden bzw. den Subtrahenden so zerlegen, dass sie erst zum Zehner und dann weiter rechnen.

- Die Schülerinnen und Schüler sollen die Schreibweise (siehe AB) üben.

Verlaufsplan:

Zeit	Unterrichtsverlauf	Medien / Materialien / Sozialformen
0 min	Warming up: Kopfrechnen Addition/ Subtraktion bis 10	
5 min	Einführung: Lehrkraft: „Wir wollen heute den Zehnerübergang üben." → hängt Beispielaufgabe 8+4 an die Tafel und Plättchen (s. Tafelbild) Schüler äußern sich (→ nennen Ergebnis, 4 muss man zerlegen, erst bis zum Zehner usw.) (Hilfsimpuls: Was muss man zuerst tun? Wer erinnert sich?) → gewünschte Antwort: den zweiten Summanden zerlegen, bis 10 dann weiter. Lehrkraft schreibt bekannte Schreibweise an die Tafel. Schüler verteilen Plättchen und schreiben Zahlen in die Kästchen (zerlegen den zweiten Summanden) → Schüler errechnen Ergebnis - weitere Beispielaufgabe 7+5 gleiches Vorgehen - 3. Beispielaufgabe 14-6 gleiches Vorgehen	Plättchen, ~~Ta~~ Tafelbild

- Schüler wiederholen den ersten Schritt bei einer Additions-/Subtraktionsaufgabe mit Zehnerübergang (→ wichtig: Zerlegen des zweiten Summanden, erst bis Zehn, dann der Rest, zerlegen des Subtrahenden erst bis 10, dann der Rest)

didaktischer Kommentar: Die Schülerinnen und Schüler sollen wiederholen, was zunächst bei einer Additionsaufgabe mit Zehnerübergang wichtig ist. Anschließend sollen sie handelnd mit Hilfe der Plättchen den zweiten Summanden zerlegen. Hierbei hilft auch die Schreibweise, bei der die Rechnung auf zwei Rechnungen (bis 10 und weiter) aufgeteilt wird. Das Verschieben der Plättchen verdeutlicht zunächst die Zerlegung des zweiten Summanden. Anschließend werden ein weiteres Additionsbeispiel und ein Subtraktionsbeispiel gerechnet, um die Schüler wieder mit dem Vorgehen vertraut zu machen.

15 min	Erarbeitung / Arbeitsphase: Lehrkraft: „Jetzt wollen wir das Zerlegen in Gruppen üben."	Eierkartons, Plastikeier, Steckwürfel, AB

→ Lehrkraft teilt Kinder in Gruppen auf.

1. Gruppe: jedes Kind bekommt 2 Eierkartons und 20 Eier aus Plastik und AB mit Additions- und Subtraktionsaufgaben mit Zehnerübergang. (siehe AB)

2. Gruppe: jedes Kind bekommt rote und blaue Steckwürfel und AB

3 Gruppe: Schüler bekommen nur AB

didaktischer Kommentar:
In der ersten Gruppe können die schwächeren Kinder mit Hilfe von konkreten Material handelnd den zweiten Summanden bzw. den Subtrahenden zerlegen. Dabei können sie die Anzahl des ersten Summanden / Minuenden in die erste Eierschachtel stecken. Dann nehmen sie die Anzahl des zweiten Summanden / Subtrahenden und nehmen sie weg oder fügen sie hinzu. Dadurch müssen sie die zweite Zahl automatisch zerlegen, da nur 10 Eier in eine Schachtel passen. Dabei können sie das Zerlegen handelnd ausprobieren und müssen es nicht im Kopf vollziehen.

Hierbei wird also vorallem das Verfahren des Zerlegens geübt.
In der zweiten Gruppe können die mittleren Schüler anhand von etwas abstraktem Material üben. Hier ist die volle Zehn nicht vorgegeben. Sie müssen selbst sehen wie sie die zweite Zahl zerlegen müssen. bzw. wann sie bei 10 sind. Dies erfordert mehr eigenständiges Zerlegen. Trotzdem können die Schüler hier auf Material zurückgreifen, um ihre Überlegungen zu überprüfen.
In der dritten Gruppe befinden sich Schüler die das Zerlegen bereits im Kopf vollziehen können. Dieses bekommen lediglich das AB. Auf diesem müssen sie aber trotzdem das Zerlegen durchführen, auch wenn sie bereits in einem rechnen könnten.
Insgesamt bearbeiten also alle Schüler das gleiche AB. und üben alle die Schreibweise sowie das zerlegen der zweiten Zahl. Dabei unterscheiden sie sich nur durch das bereitgestellte Material.

35 min **Kontrolle:**
Lehrkraft: „Vergleiche mit deinem Nachbarn die Ergebnisse"

→ Schüler vergleichen Ergebnisse mit ihren Nachbarn.

Dies ist möglich, da alle die gleichen Aufgaben bearbeiten. Außerdem ist zu erwarten, dass die meisten Schüler die Aufgabe richtig beantworten, da ihnen viele Hilfestellungen gegeben werden.

40 min | <u>Reflexion:</u>

<u>Lehrkraft:</u> Wer kann mir noch mal sagen, wie du vorgehst bei einer Aufgabe mit Zehnerübergang?

- Schüler wiederholen

45 min | - Hefteintrag

AB:

1. 8 + 7

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] 8 \arrow[rr, "+7"] \arrow[dr, "+\square"'] & & {} \\ & 10 \arrow[ur, "+\square"'] & \end{tikzcd}$$

6 + 6

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] 6 \arrow[rr, "+6"] \arrow[dr, "+\square"'] & & {} \\ & 10 \arrow[ur, "+\square"'] & \end{tikzcd}$$

usw.

2. 5 + 9

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] 5 \arrow[rr, "+9"] \arrow[dr] & & {} \\ & {} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

7 + 9

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] 7 \arrow[rr, "+9"] \arrow[dr] & & {} \\ & {} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

usw.

3. 15 − 6

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] 15 \arrow[rr, "-6"] \arrow[dr, "-\square"'] & & {} \\ & 10 \arrow[ur, "-\square"'] & \end{tikzcd}$$

1~~5~~7 − 9

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] 17 \arrow[rr, "-9"] \arrow[dr, "-\square"'] & & {} \\ & 10 \arrow[ur, "-\square"'] & \end{tikzcd}$$

usw.

4. 13 − 8

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] 13 \arrow[rr, "-8"] \arrow[dr] & & {} \\ & {} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

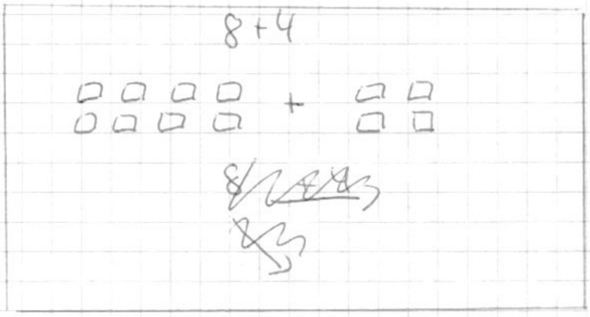
15 − 8

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] 15 \arrow[rr, "-8"] \arrow[dr] & & {} \\ & {} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

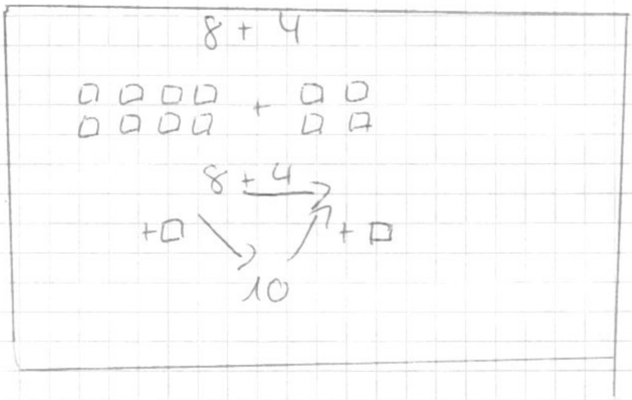
usw.

Tafelbild:

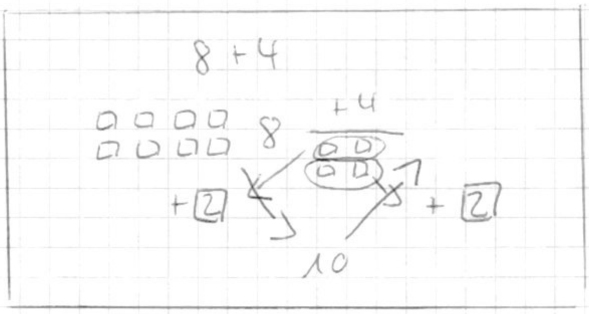
1.



2.



3.



Verschieben der Plättchen 4 (aufteilen in 2+2)