

## Thema 3

### Frage 1 :

Grundlegend zur Beschreibung ~~der~~<sup>des</sup> Symmetriebegriffs sind Kongruenzabbildungen. Bei Kongruenzabbildungen, auch Bewegungen oder Isometrien genannt, handelt es sich um geometrische Abbildungen, die Form und Größe einer Figur erhalten, das heißt sie sind Längen-, Winkel- und Abstandstreue. Jede Bewegung kann in der Ebene durch maximal drei Achsenspiegelungen beschrieben werden. ~~Zu~~ Wenn zwei Figuren durch eine Isometrie aufeinander abgebildet werden können, heißen sie kongruent ~~zueinander~~ oder deckungsgleich.

Das Wort „symmetrisch“ bedeutet „gleichartig“. Dabei kann die Symmetrie eine Eigenschaft einer Figur sein (die Figur ist in sich symmetrisch) oder die Beziehung zwischen zwei Figuren beschreiben (zwei Figuren sind zueinander symmetrisch).

Im ersten Fall lässt sich die Symmetrieeigenschaft folgendermaßen definieren:

Eine Figur heißt in sich symmetrisch genau dann, wenn es eine nichtidentische Kongruenzabbildung gibt, die die Figur auf sich selber abbildet.

In der Ebene gibt es 3 verschiedene Kongruenzabbildungen: Achsenspiegelung, Drehung, Verschiebung.

Dementsprechend gibt es 3 unterschiedliche Symmetriearten: Achsensymmetrie, Dreh- und Schubsymmetrie.

Die Achsensymmetrie wird in Klasse 3 und 4 behandelt,

Dreh- und Schubsymmetrie in der 4. Klasse.

Im Folgenden werden diese Symmetriearten näher erläutert.

### Achssymmetrie:

Definition der Achsenspiegelung:

\* Eine Abbildung, die die Ebene auf sich abbildet heißt Achsenspiegelung, wenn sie jeden Punkt  $P$  einen Bildpunkt  $P'$  nach folgender Vorschrift zuordnet:

- Gilt  $P \in g$ , dann gilt:  $P = P'$ .
- Gilt  $P \notin g$ , dann halbiert  $g$  die Strecke  $\overline{PP'}$  senkrecht.

x Sei  $g$  eine Gerade.

Die Achssymmetrie hat folgende Eigenschaften:

- alle Punkte auf  $g$  sind Fixpunkte,
- Längen-, Winkel-, geradentreu,
- Änderung des Umlaufsinnes,
- jeder Punkt auf  $g$  hat von  $P$  und  $P'$  den gleichen Abstand.

Eine Figur heißt achsensymmetrisch genau dann, wenn sie durch eine Achsenspiegelung auf sich selbst abgebildet werden kann.

### Drehsymmetrie

Definition der Drehung:

Sei  $Z$  ein Punkt in der Ebene und  $\varphi$  ein Winkel.

Dann heißt eine Abbildung, die die Ebene in sich abbildet Drehung um  $Z$  mit Drehwinkel  $\varphi$ , wenn sie jeden Punkt  $P$  einen Bildpunkt auf folgende Weise zuordnet:

- $\overline{PZ} = \overline{P'Z}$

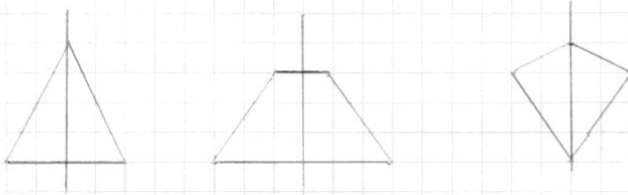
- Der Winkel  $\angle PZP'$  mit Scheitelpunkt  $Z$  ist  $\varphi$ .

Die Drehung hat folgende Eigenschaften:

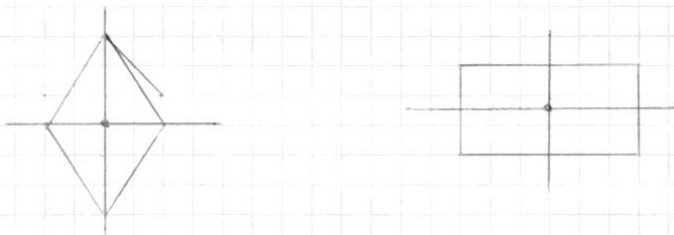
- jeder Bildpunkt ist von  $Z$  genauso so weit entfernt wie der Punkt selbst,
- $Z$  ist einziger Fixpunkt,
- Längen-, Winkel-, Geradenstreue,
- Umlaufsinne werden beibehalten
- ~~eine Drehung um  $180^\circ$  heißt Punktsymmetrie~~

Eine Figur heißt drehsymmetrisch, wenn sie durch eine Drehung auf sich selbst abgebildet werden kann. Ist sie drehsymmetrisch bzgl.  $180^\circ$ , heißt sie punktsymmetrisch.

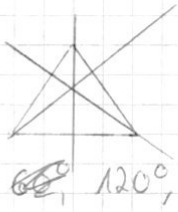
Erläuterung der Achsen- und Drehsymmetrie anhand von Figuren, die in der Grundschule behandelt werden:



Das ~~B~~ gleichschenklige Dreieck, das gleichschenklige Trapez und das Dacherviereck haben eine Symmetrieachse und sind nicht drehsymmetrisch.

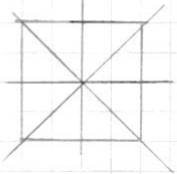


Raute und Rechteck haben zwei Symmetrieachsen und sind Punktsymmetrisch.



Das gleichseitige Dreieck hat drei Symmetrieachsen und ist drehsymmetrisch bzgl.

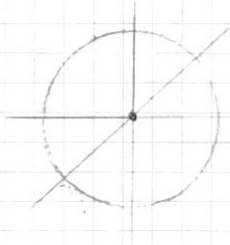
~~60°~~,  $120^\circ$ ,  $240^\circ$  und  $360^\circ$



Das Quadrat hat vier Symmetrieachsen und ist drehsymmetrisch bzgl.  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$  und  $360^\circ$ .



Das Parallelogramm ist nicht achsen-, aber punktsymmetrisch.



Der Kreis ist drehsymmetrisch bzgl. jedem Winkel und hat unendlich viele Symmetrieachsen.

### Schubsymmetrie

Definition der Verschiebung:

Sei ein Pfeil  $\vec{AB}$  gegeben. Eine Abbildung, die die Ebene in sich selbst abbildet heißt Verschiebung mit Schiebepfeil  $\vec{AB}$  wenn jedem Punkt  $P$  ein Bildpunkt  $P'$  auf folgende Weise zugeordnet wird:

Der Pfeil  $\vec{PP'}$  ist hat die gleiche Richtung, Länge und Orientierung wie  $\vec{AB}$ .

Eigenschaften der Verschiebung:

- Um laufsinn bleibt erhalten,
- keine Fixpunkte,
- Längen-, Winkel-, Geradenstreue,
- jeder Pfeil  $\vec{PP'}$  ist parallel zu  $\vec{AB}$

Eine Figur heißt schubsymmetrisch, wenn sie durch eine Verschiebung auf sich selbst abgebildet werden kann.

Beispiel zur Schubsymmetrie:

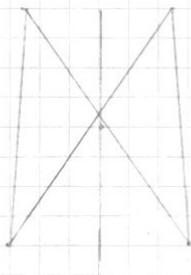
Flächen- und Bandornamente sind ~~häufig~~ <sup>schub</sup>symmetrisch, zudem weisen sie auch oft Dreh- und Achsensymmetrie auf.



Zusammenführung der Symmetriecurven:

- Jede Drehung kann durch zwei Achsenspiegelungen beschrieben werden, die Symmetrieachsen schneiden sich im Drehzentrum.
- Jede Verschiebung kann durch zwei Achsenspiegelungen beschrieben werden, ~~diese sind~~ die Symmetrieachsen sind zueinander parallel und senkrecht zur Verschiebungsrichtung.

Anmerkung:



Eine solche Figur kann sowohl als achsensymmetrische Figur angesehen werden, als auch als eine durch Achsenspiegelung erzeugte Figur, Bild und Urbild eine neue Figur

## Frage 2:

### Achsensymmetrie

Aktivitäten und Lernziele auf der aktiven Ebene:

#### • Falten

ein Buch oder Taschentuch

Die Schüler falten mit Papier und untersuchen die dabei entstandenen Faltslinien. Eine weitere Möglichkeit ist das Herstellen von „Klecksbildern.“ Dabei wird zunächst ein Buch gefaltet, und dann ein paar Tropfen Tinte oder Wasserfarbe in das offene Buch gegeben. Durch Zusammenklappen und Drücken wird die Farbe verteilt, es entsteht eine achsensymmetrische Figur oder zwei Figuren, die ~~zu~~ Spiegelbilder voneinander sind.

- Die Schüler sollen ein erstes Verständnis von „deckungsgleich“ ~~er~~ aufbauen
- Die Schüler sollen achsensymmetrische Figuren durch Klecksbilder selbst herstellen können.
- Die Schüler sollen Falten als Möglichkeit zur Überprüfung der Achsensymmetrie kennen lernen.

#### • Falten und Schneiden

Zunächst wird ein Buch gefaltet, dann auf die Faltachse eine Figur auf gezeichnet und ausgeschnitten. Es entsteht dadurch eine achsensymmetrische Figur. Durch wieder Auseinander- und Zusammenfalten wird dies bewusst.

- Die Schüler sollen achsensymmetrische Figuren durch falten und schneiden selbst herstellen können.
- Die Schüler sollen die Faltachse als Symmetrieachse erkennen.

- Legen mit Formplättchen / Stäbchen

Mit Formplättchen legen die Schüler Figuren nach oder aus und ergänzen sie symmetrisch. Sie können auch selbst eigene symmetrische Figuren erfinden und legen. Dabei kann ein rardloser Taschenspiegel verwendet werden, um Symmetrie zu prüfen, und als Hilfe beim Ergänzen und Legen.

Die Schüler sollen

- Figuren durch Legen achsensymmetrisch ergänzen.
- selbst achsensymmetrische Figuren auf Achsensymmetrie überprüfen können

- eigener Körper

Achsensymmetrie lässt sich am eigenen Körper feststellen, z.B. bzgl. der Arme, Beine oder des Gesichts.

Zudem können die Schüler achsensymmetrische Bewegungen, z.B. Hampelmann springen, machen.

- Die Schüler sollen Achsensymmetrie am eigenen Körper erkennen.

- Umwelt

Die Schüler gehen auf Entdeckungstour mit und suchen achsensymmetrische Figuren in ihrer Umwelt, dazu eignen sich z.B. Verkehrsschilder, Flaggen, Schmetterlinge, Blätter, usw.



Die Schüler sollen

- achsensymmetrische Figuren in der Umwelt erkennen.
- sich der Vielfalt an achsensymmetrischen Figuren bewusst werden.

• Spannen auf dem Geobrett

Die Schüler spannen nach Vorgaben Figuren und ergänzen diese achsensymmetrisch <sup>oder</sup> spannen auf zu achsensymmetrischen Figuren die Symmetrieachse. Auch ein Partnerspiel ist möglich. Ein Kind spannt eine Figur und bestimmt die Kante des Geobretts, dass die Symmetrieachse sein soll. Der Partner legt dort sein Geobrett an und spiegelt die Figur.

Die Schüler sollen

- achsensymmetrische Figuren spannen können.
- Figuren achsensymmetrisch ergänzen können.
- Symmetrieachsen spannen können.

Aktivitäten und Lernziele auf der ikonischen Ebene:

Die Figuren, die die Schüler vorher gelegt oder gezeichnet haben, ~~in~~ werden nun gezeichnet.

Dabei können sie freihändig, mit Lineal, Geobrett, Schablonen, Zirkel auf weißem, gepunktetem oder kariertem Papier zeichnen. Auch eine Geometriesoftware kann verwendet werden.

Die Schüler ergänzen dabei Figuren achsensymmetrisch, zeichnen Symmetrieachsen ein oder ~~erfinden~~ ~~achsen~~ spiegeln ganze Figuren.



Die Schüler sollen:

- achsensymmetrische Figuren zeichnen können
- Symmetrieachsen einzeichnen können
- Figuren  $\alpha$  zeichnerisch achsensymmetrisch ergänzen können.
- Figuren achsensymmetrisch einfärben können.

Aktivitäten und Lernziele auf der symbolischen Ebene

- kleines Geobrett: Lehrer nennt Zahlen, um die gespannt werden soll und die Symmetrieachse, Schüler sollen Gedanken spiegeln
- ~~Kno~~ Knobelpuzzle: Schüler suchen in scheinbar symmetrischen Figuren Fehler
- Schüler erfinden selber Knobelpuzzle.
- Lehrer gibt Beispiele vor und fragt wie diese gelöst werden müssen um eine symmetrische Figur zu erhalten.

Die Schüler sollen

- sich Spiegelungen gedanklich vorstellen können
- achsensymmetrie von nicht<sup>achsen</sup>symmetrischen Figuren unterscheiden können.
- ~~Feldern~~

### Drehsymmetrie

Aktivitäten und Lernziele auf der enaktiven Ebene

- Drehungen auf eigenen Körper
- Schüler führen Drehungen auf Ansage aus

Die Schüler sollen

- Drehungen nach Verschrift durchführen können.
- erkennen, dass der Drehpunkt die Richtung und ~~und~~ der Drehbetrag bekannt sein müssen

- Drehungen an alltäglichen Gegenständen z.B. Windräder basteln, Räder, Kreisel, Felgen, Reifen, ... drehen

Ziele: ~~so~~ wie bei „Drehungen eigenen Körper“

- Gegeplättchen

Schüler legen durch Drehungen von Foamlättchen dreh-symmetrische Figuren, bzw. ergänzen Vorgaben dreh-symmetrisch. Dadurch entstehen z.B. Windräder

Die Schüler sollen

- dreh-symmetrische Figuren legen können (durch legen)
- Spannen auf dem Geobrett

Schüler drehen gespannte Figuren und spannen nach jeder Drehung einen neuen Gummi, diese können selbst ausgedacht oder von einer Vorgabe aus ergänzt werden

Die Schüler sollen

- dreh-symmetrische Figuren spannen können.
- Figuren dreh-symmetrisch ergänzen können

Aktivitäten ~~aus~~ und Ziele auf der ikonischen Ebene

Die gelegten oder gespannten Figuren können nun gezeichnet werden: freihändig, mit Schablone, Lineal, Geodreieck, Zirkel, auf weißes, gepunktetes oder kariertes Papier. Zudem können Figuren dreh-symmetrisch ausgemalt werden, oder auch eine Geometriesoftware verwendet werden.

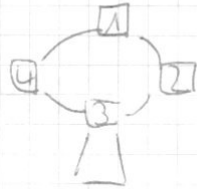
Die Schüler sollen

- Figuren dreh-symmetrisch ergänzen können (durch zeichnen.)

- Figuren drehsymmetrisch einfärben können.

Aktivitäten und Lernziele auf der symbolischen Ebene:

- Schüler stellen sich ein Riesenrad vor.



Wo befindet sich Kabine 1 nach einer Viertelrotation nach links

- Kleines Geobrett: eine vorgegebene Figur soll im Gedanken gedreht werden; Schüler nennen dann die Stäbchen, wo die Figur jetzt ist.

- Schüler suchen in scheinbar achsensymmetrischen Figuren Fehler

- Schüler entwickeln selber Fehlerbilder

Die Schüler sollen

- sich Drehungen im Gedanken vorstellen können

- drehsymmetrische von nichtdrehsymmetrischen Figuren unterscheiden können.

### Schubsymmetrie

Aktivitäten und Lernziele auf der enaktiven Ebene:

• Legen:

Die Schüler verschieben Formplättchen auf Karopapier nach Vorgabe (z.B. 4 Kästchen nach rechts, 2 nach oben) oder sie finden selbst die Verschiebungsvorschrift bei 2 gegebenen Formen.

Die Schüler sollen

- Verschiebungen nach Vorgabe der Vorschrift durchführen können.
- Verschiebungsvorschriften erkennen und formulieren können
- Spannen auf dem Geobrett

Hier wird der Verschiebungsbetrag in Stiften angegeben. Dabei verschieben die Schüler gespannte Figuren nach Vorschrift oder formulieren die Verschiebungsvorschrift.

Die Schüler sollen

- Verschiebungen auf dem Geobrett durchführen können.
- Verschiebungsvorschriften erkennen und formulieren können.

Aktivitäten und Lernziele auf der ikonischen Ebene:

Die Schüler führen Verschiebungen auf Karopapier durch, dabei können Schablonen hilfreich sein.

Auch kann eine dynamische Geometriesoftware verwendet werden.

Durch das schubsymmetrische Ausmalen und Fortsetzen von Mustern stellen die Schüler Bandornamente her.

Die Schüler sollen

- Figuren schubsymmetrisch fortsetzen können.
- Bandornamente herstellen können
- Figuren schubsymmetrisch ausmalen können

Aktivitäten und Lernziele auf der symbolische Ebene:

- Schüler <sup>stellen sich</sup> beschreiben Bandornamente vor und beschreiben diese
- Kleines Geobrett: Schüler führen in Gedanken Verschiebung durch und nennen die Stifte, um die die neue Figur ~~beso~~ gespannt ist
- Schüler finden Fehler in scheinbar schubsymmetrischen Figuren
- Schüler stellen selbst Fehlerbilder her.

Die Schüler sollen

- Bandornamente beschreiben können.
- sich Verschiebungen vorstellen können
- schubsymmetrisch von nichtschubsymmetrischen Figuren unterscheiden können.

Frage 3:

Thema: Einführung der Achsensymmetrie

Lehrplaneinordnung: Das Thema gehört in der 3. Klasse, Mathematik zum Bereich Geometrie unter den Punkt 3.1.3. Achsensymmetrie.

Sequenz:

1. Einführung der Achsensymmetrie
2. Legen von  $A$  achsensymmetrischen Figuren
3. Zeichnen von achsensymmetrischen Figuren.
4. Stationentraining zur Festigung.

Hier wird die erste Stunde der Sequenz dargestellt.

Grobziel: Die Schüler sollen ~~erste~~ Erfahrungen an den Symmetriebegriff handelnd herangeführt werden.

Feinziele: Die Schüler sollen;

- achsensymmetrische Figuren der Klatschbilder selbst herstellen können
- Falten als Möglichkeit zur Überprüfung von Achsensymmetrie kennen lernen
- die Begriffe „achsensymmetrisch“, „deckungsgleich“, „Symmetrieachse“ kennen lernen.
- achsensymmetrische von nicht achsensymmetrischen Figuren unterscheiden können (schwächere Schüler durch Falten, stärkere Schüler auch im Kopf)
- deckungsgleiche Figuren erkennen können.

↗ Sachanalyse: vgl. Aufgabe 1

Allgemeine Ziele: Die Schüler sollen ihr räumliches Vorstellungsvermögen verbessern.

Voraussetzungen und Schwierigkeiten

Die Schüler haben schon durchaus Vorwissen zum Thema „Achsensymmetrie“. In Natur, Kunst und am eigenen Körper kommen symmetrische Beziehungen vor, auf diesen soll ~~zuerst~~ angeknüpft werden. \*

Die Stunde erfordert viel Feinmotorik beim genauen Ausschneiden und Falten ist dies bei Schülern nicht so gut entwickelt, können deckungsgleiche Figuren nicht erkannt werden

\* Die Stunde greift auch die aus der 1. Klasse bekannten Figuren an. Diese werden auf ihre symmetrische Eigenschaft hin überprüft.

Je besser die räumliche Vorstellungsfähigkeit in den ersten beiden Jahrgangsstufen entwickelt wurde, umso leichter wird den Schülern das Erkennen von Symmetrie fallen.

### Didaktische Analyse:

Die Stunde beginnt mit dem Herstellen eines Klecksbildes. Dadurch sollen die Schüler motiviert werden und zudem hat später jeder Schüler eine achsensymmetrische Figur um sie zu untersuchen. Anhand dieser Bilder werden im Sitzkreis die Fachbegriffe „achsensymmetrisch“, „deckungsgleich“ und „Symmetrieachse“ erarbeitet, dabei kann jeder Schüler diese ~~Bsp~~ Begriffe anhand seines Bildes nachvollziehen. Durch das Überprüfen von weiteren Figuren auf ihre Achsensymmetrische Eigenschaften wird zum einen das Falten zur Überprüfung erlernt und angewendet, zum anderen werden die Schüler hier <sup>zur</sup> ~~auf die~~ konkreten Anwendung der Fachbegriffe angehalten um diese zu sichern.

Im Anschluss wird das Tafelbild als Sicherung in das Heft notiert, bevor sich die Übungsphase anschließt. Hier haben die Schüler ~~st~~ zwei Aufgaben zu bearbeiten: das Finden von deckungsgleichen Figuren und das Überprüfen von Figuren auf Achsensymmetrie. Hier findet eine Differenzierung statt: schwächere Schüler überprüfen die Achsensymmetrie durch Falten, stärkere können das auch im Kopf



bearbeiten. Zudem steht die Reihenfolge der Angaben und die Wahl der Sozialform den Schülern offen. Ihre Ergebnisse können die Schüler mit Hilfe von Lösungsblättern selbst kontrollieren. Sollten Schüler alle Aufgaben bearbeitet haben, steht eine zusätzliche Aufgabe bereit: die Überprüfung von Buchstaben auf Achsensymmetrie. Als Hausaufgabe sollen die Schüler zu Hause nach achsensymmetrischen ~~Figuren~~<sup>Gegenständen</sup> suchen und wenn es möglich einen zur nächsten Stunde mitbringen.

Anmerkung zu Lernschwierigkeiten + -voraussetzungen:  
Die Fachbegriffe können für die Schüler evtl. schwer verständlich sein. Der Lehrer muss auf die richtige Verwendung achten.

Die Schüler sind offener und kooperativer Lernformen gewöhnt und können ihre Lösungen mit Lösungsblättern selbstständig kontrollieren.

## Verlaufsschema

Artikulationsstufe	Lehrer-/Schüleraktivitäten	Sozialform / Medien	Didaktischer Kommentar
1. Motivation	L. zeigt den S ein Klecksbild L.: „Kannst du dir vorstellen wie man so etwas herstellt?“ → S äußern sich L.: „Heute basteln wir ein solches Klecksbild.“ S holen sich Material und basteln ein Klecksbild	Klecksbild Papier Tinte Plenum	Das Basteln soll die S motivieren
2. Erarbeitungsphase	L. „Wenn du fertig bist, treffen wir uns <sup>mit Bild</sup> im Sitzkreis.“ L. „Was fällt dir an euren Bildern auf?“	Sitzkreis / fertige Klecksbilder Wortkarten „achsensymmetrisch“ „deckungsgleich“ „Symmetrieachse“	gemeinsame Erarbeitung der Fachbegriffe anhand der Bilder

S. äußern sich

evtl.: sieht aus wie ein Schmetterling, sieht gleich auf beiden Seiten aus, ...

L. " evtl. L. impuls:

"Schau dir die Hälften genau an, was passiert, wenn du ~~se~~  
<sup>das Bild</sup>  
~~aufeinander~~ zusammenfallest?"

S.: "Passt genau aufeinander."

L.: "Eine solche Figur hat einen besonderen Namen:

sie heißt achsensymmetrisch."

L. legt Wortkarte in die Mitte des Stabkreises.

L.: erklärt das beide genau aufeinander passen. Man sagt die beiden Hälften sind deckungsgleich."

L legt Wortkarte in die Mitte.  
 L: "Eine achsensymmetrische Figur hat also zwei deckungsgleiche Hälften. Schau dir dein Bild an. Erkennst du die Falzlinie in der Mitte? Sie hat auch einen besonderen Namen. Sie heißt Symmetrie-achse."

L legt Wortkarte in die Mitte  
 L: "Jetzt wollen wir diese Figuren überprüfen, ob sie deckungsgleich sind. Dazu falten wir sie."  
 Schüler kommen in die Mitte und überprüfen durch Falten die Figuren, dabei verwenden sie die Fachbegriffe.

Papierfiguren

Anwendung der Fachbegriffe

Sicherung	L hängt die Wortkarten, sein Klecksbild und die überprüften Figuren an die Tafel und notiert Überschrift. Schüler schreiben Tafelanschrift ab und kleben ihr Bild ein	Tafel Bild Wortkarten Klett Einzelarbeit	Abschreiben dient der Sicherung und Festigung
4. Übungsphase	L: „Damit du dich mit Achsensymmetrie sehr gut auskennst, habe ich dir zwei Aufgaben mitgebracht. Du kannst dir die Aufgaben die du bearbeiten willst selber aussuchen. Wer fertig ist, kann seine Lösung mit den Lösungsblättern vergleichen. Wer ganz fertig ist, kann sich bei mir noch eine Aufgabe holen.“	<del>Handwritten scribbles</del>	selbstständiges Üben, soziale, qualitative, quantitative selbstständiges Überprüfen der Lösung  <del>Handwritten scribbles</del>

5

- L erklärt die Aufgaben:
  - deckungsgleiche Figuren gleich anmalen
  - Figuren auf Achsensymmetrie überprüfen (Falten oder Kopt)
  - Zusatz: Buchstaben auf Achsensymmetrie prüfen

5. Hausaufgabensstellung

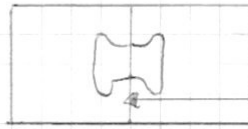
~~L gibt differenz.~~  
L: " Schau dich mal zu Hause um, ob du achsensymmetrische Gegenstände findest. Bringe einen in die nächste Stunde mit

L: Lehrer, S: Schüler

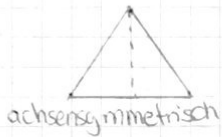
Gegenstände  
Ausgangspunkt  
für nächste Stunde

Tafelbild:

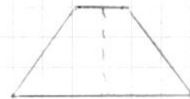
Wie lernen achsensymmetrische Figuren kennen



achsensymmetrisch  
deckungsgleich  
Symmetrieachse



achsensymmetrisch



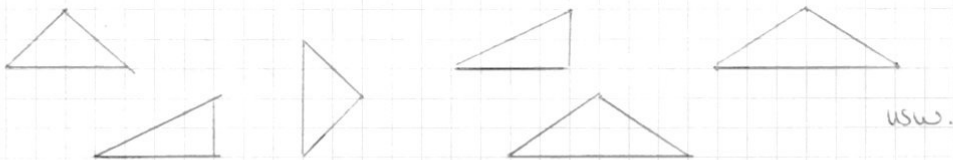
achsensymmetrisch



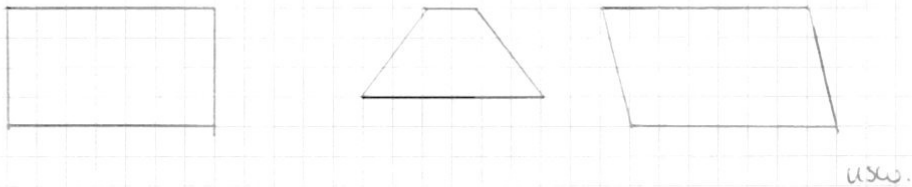
nicht  
achsensymmetrisch

Arbeitsaufträge:

Male deckungsgleiche Dreiecke ~~in~~ in der gleichen Farbe aus!



Sind diese Figuren achsensymmetrisch? Überprüfe durch Ausschneiden und Falten oder im Kopf!



Sind diese Buchstaben achsensymmetrisch?  
Kreuze an!

