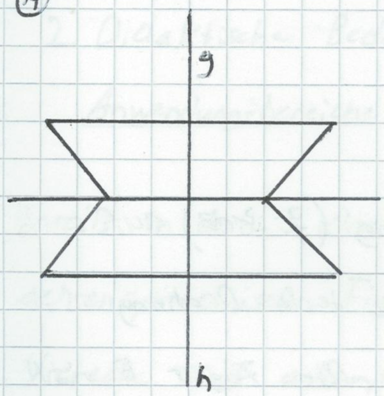
21.09.17

Thema Nr. 1

1. Symmetrische Figur

Eine ebene Figur ist symmetrisch, wenn sie sich durch eine Kongruenzabbildung auf sich selbst abbilden lässt.

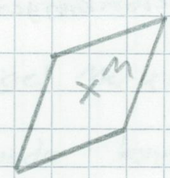
A



Diese Figur ist achsensymmetrisch, weil sie sich an g (und h) als Achse(n) spiegeln lässt und dabei auf sich selbst abbildet. Die Geraden g und h stellen hier die Symmetrieachsen der Figur dar. (Bei der Achsenspiegelung bestimmt jeder außerhalb der Achse liegende Punkt P, hier der Figur A, mit dem Bildpunkt P' eine Strecke, die von der Achse ~~liegende Punkt P, hier~~ rechtwinklig halbiert wird. Bei achsensymmetrischen Figuren liegen die Bildpunkte auf der Figur.)

B

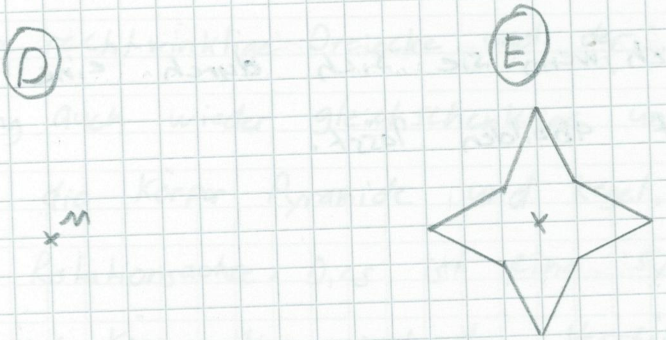
C



Die Figuren B und C sind (unter anderem!) punktsymmetrisch. Figuren sind dann punktsymmetrisch, wenn sie sich an einem Punkt M spiegeln lässt und sich dabei die Bildpunkte auf die Figur selbst abbilden

Alle Geraden durch den Punkt M schneiden die ~~I~~ Figur und ihre Schnittpunckte mit der Figur haben den gleichen Abstand von M.

Die Punktspiegelung stellt eine Drehung um 180° dar.

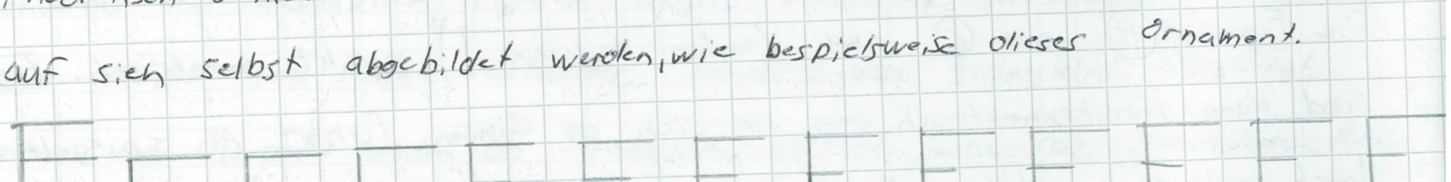


Figuren sind drehsymmetrisch, wenn sie sich durch Drehung ($\neq 360°$) auf sich selbst abbilden lassen. Der Kreis (Figur D) lässt sich durch jede Drehung am Mittepunkt drehen, ist also vollkommen drehsymmetrisch. Die Figur E ist bei Drehwinkeln von 45°, 180° (Punktspiegelung) und 270° drehsymmetrisch.

Da eine Drehung (Jeder von Drehpunkt M verschiedenen Punk P bestimmt mit seinem Bildpunkt P' einen nach Größe und Orientierung konstanten Winkel PMP'. Außerdem gilt ~~∦~~ $\overline{PM} = \overline{P'M}$.) auch durch zwei aufeinander-folgende Spiegelungen an zwei sich schneidenden Achsen durchgeführt werden kann, muss jede drehsymmetrische Figur auch Symmetrieachsen besitzen. Bei drehsymmetrischen Figuren liegen diese auf dem Drehpunkt.

Alle hier angebrachten Beispiele dienen examplarisch der Veranschaulichung. Alle diese Beispiele sind aber in mehrfacher Hinsicht symmetrisch. Es wurden nicht immer alle Symmetrien eingezeichnet, sondern jeweils nur die, deren Beschreibung folgte.

Theoretisch denkbar sind auch symmetrische Figuren, die durch Verschiebung auf sich selbst abgebildet werden, wie bespielsweise dieses Ornament.



Mathematisch korrekt ist dies aber nur, wenn die Figur unendlich lang ist, da sonst durch Verschiebung (um 1,5cm nach rechts) das letzte E nicht auf sich selbst abgebildet werden würde.
Dieses Bsp. gilt auch für eine Schubspiegelung, wobei die (Spiegel-) Symmetrieachse horizontal mittig liegt.

2. Didaktische Bedeutung des Symmetriebegriffs

Anwendungsbereiche

Bereits in der 5. Klasse lernen die Schüler-innen (Folgende abgekürzt S) achsensymmetrische Figuren kennen, wie das Rechteck und das Quadrat. Beide Vierecke sind achsensymmetrisch bzgl. der Mittelsenkrechten, das Quadrat sogar bzgl. der Diagonalen. Die Achsensym. wird behandelt. In der 6. Klasse lernen die S bereits die Drehung und die Spiegelung kennen (wichtig ist aber eine Abgrenzung zwischen Symmetrie und Kongruenzabbildungen: Symmetrie ist eine Eigenschaft einer Figur, Kongruenz ist eine Beziehung zwischen zwei Figuren. Eine Kongruenzabbildung kann zwar eine Figur auf sich selbst abbilden, aber sie kann die Figur auch in eine anderes liegende Bildfigur abbilden).

Außerdem lernen die S in der 6. Klasse Eigenschaften und Definitionen von Vierecken (Rechtecken, Quadrat, Parallelogramm, Trapez, Raute, Drachenviereck sowie deren spezielle Formen, vgl. später Aufgabe 4.). Dabei stellen die die Symmetrieeigenschaften wichtige Merkmale dar! Die ersten genauer betrachten Körper, Würfel und Quader können auch hinsichtlich Symmetrie betrachtet werden. In der 7. Klasse werden Dreiecke behandelt. Das gleischenklige und das gleichseitige Dreieck sind dabei spezielle Formen, die Achsensymmetrie aufweisen (Das gleichseitige ist sogar drehsymmetrisch bzgl.

Ebenfalls wird der Körper Prisma genauer behandelt. Bei Grundfläche und ganzem Körper kann Symmetrie untersucht werden.

In der 8. Klasse wird der Kreis sowie der Körper Kreiszylinder thematisiert. In der 9. Klasse rechtwinklige Dreiecke und der Satz des Pythagoras (zu dessen Erarbeitung auch wieder gleichschenklige und -seitige Dreiecke behandelt worden) sowie die Körper Pyramide und Kegel. Kreiszylinder und Kreiskegel haben eine Rotationsachse. Dies ist eine Symmetrie(-achse) und der Begriff des jew. Körpers kann mit dem Verständis für Symmetrien und Kongruenzabbildungen wesentlich einfacher erarbeitet werden.

Lernziele

Die S lernen für Figuren, im besonderen für Vierecke, grundlegende Eigenschaften wie die Achsen- und Punktsymmetrie kennen. Durch die Behandlung von allg. Figuren kann der Begriff der Symmetrie (auch) entwickelt werden. Die entwickeln aber auch ein Verständnis dafür, warum bestimmte Vierecke etwas besonderes sind. Nicht nur Rechteck und Quadrat, sondern auch Parallelogramm, dass gleichschenklige Trapez, der symmetrische Drachen sowie die Raute weisen Symmetrien auf. Dadurch kann das intuitive Begriffsverständnis (Vollrath) dieser Vierecke erweitert werden um das Wissen und die Erkenntnis von Symmetrien und ihre Bedeutung für das jeweilige ~~V~~ Viereck. Somit kann ein inhaltlich-integriertes Begriffsverständnis gefördert werden.

Die S lernen, mehr in den Figuren zu „sehen", d.h. sie untersuchen (handelnd und gedanklich) Figuren bzgl. Symmetrieeigenschaften. Dadurch müssen Achsen und Punkte entweder handelnd oder gedanklich eingefügt werden und überprüft werden, ob Symmetrie vorliegt. Eine rein handelnde Arbeit

Kopfgeometrie gefördert, d.h. im Kopf wird bspw. eine Achsen- oder Punktspiegelung vorgenommen und überprüft ob die Figur auf sich abgebildet werden kann. Solchen geometrisches Denken (welches durch viele weitere Übungen hinsichtlich Drehung, das Auffallen bzw. von Körpernetzen, das überprüfen von versch. Körperansichten etc.) ist eine sehr bedeutende grundlegende Fähigkeit, die für viele Lebenszusammenhänge große Relevanz hat!

Symmetrien prägen unser ästetisches Empfinden. Die Fähigkeit Symmetien herzustellen fördert demnach auch unsere künstlerischen sowie viele Alltagsbezogene Fähigkeiten.

Mathematisch gesehen halbieren Symmetrieachsen eine Figur. Dadurch können achsensymmetrische Figuren in gleich große Teile zerlegt werden. Diese Erkenntnis ist hilfreich für viele andere mathematische Vorgänge (Flächeninhaltsberechnungen bzw. zur Herleitung der Formeln dar).

Die S

- lernen den Begriff der Symmetrie und seine Bedeutung kennen,
- können zwischen den Symmetrie~~achsenarten~~ unterscheiden,
- können symmetrische Figuren herstellen,
- können Symmetrieachsen und -punkte erkennen.
- können Drei- und Vierecke (sowie regelmäßige N-Ecke) hinsichtlich ihrer Symmetrieeigenschaften erkennen,
- lernen bei Definitionen Symmetrien zu berücksichtigen,
- erweitern ihr Begriffsverständis von Drei- und Vierecken,
- sehen denn zusammenhang aber auch Unterschied zu kongruenzabbildungen,
- erkennen Symmetrien in der Umwelt,
- entwickeln ihr ästhetisches ~~Lern~~ Lernpfinden.

3. Handlungsorientierte Aktivitäten zur Achsensymmetrie

- Falten und Schneiden

Mit Falten u. Schneiden können die S selbst achsensymmetrische Figuren herstellen. Dabei stellt die Faltlinie die Symmetrieachse dar. Durch Aufklappen wird die ganze Figur sichtbar (doppelt so groß wie die Schnittfigur) und die Achse ist durch die Falte deutlich erkennbar.

- Falten

Bereits vorgefertigte Figuren können durch Falten auf Symmetrie untersucht werden. Dabei falten die S die Figur dort, wo sie denken, dass die Achse liegt und können sofort erkennen, ob Achsensymmetrie (folgend AS) vorliegt. Dabei müssen die S erkennen dass sie das gefaltete Papier auch umdrehen müssen bzw. beide Seiten angeschaut werden müssen → die Ränder immer übereinander liegen. Vorteilhaft ist, dass mehrere Versuche möglich sind und das Ergebnis sofort erkennbar ist. Außerdem können mehrere Symmetrieachsen in einer Figur durch die Faltlinien mitgezählt werden).

- Spiegeln

An Symmetrieachsen bzw. halbe Figuren kann ein Spiegel angelegt werden und die zweite Hälfte, die Ergänzung zur Sym. Figur wird sichtbar. Diese kann sich z.B. vorher vorgestellt werden und dann relativ leicht überprüft werden. Das Spiegelbild kann auch auf das Papier gezeichnet werden. Dies erfordert ein bischen Transfer, da das Spiegelbild im 90° Winkel etwa gehalten wird und dies variabel ist (es treten Verzerrungen auf. Der S muss sich also an möglichen Linien, am besten Karopapier, orientieren können um keine Vergrößerungen Verkleinerungen o. Verzerrungen abzuzeichnen. Diese Methode fördert die Vorstellungskraft (Grundlage für Kopfgeometrie).

-auf Karopapier- zeichnen

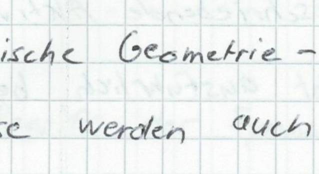
Auch ohne das Spiegeln können halbe Figuren an Achsen auf Karo-(wahlweise auch blanken) Papier eingezeichnet werden. Oder es können die Achsen in der Figur gesucht und eingezeichnet werden.

Beide ließe sich mit Falten und Schneiden oder spiegeln auf Richtigkeit überprüfen. Besonders einsichtig wird mit dieser Methode, dass Punkt und Bildpunkt den gleichen Abstand von der Achse haben. Sehr gut bietet sich dafür das Geodreiecke an, weil vom Nullpunkt aus leicht in beide Richtungen angelegt werden kann und auch die Orthogonalität zur Achse leicht zu erhalten ist (dies ist den S vielleicht oder wahrscheinlich nicht so bewusst, wird aber intuitiv verwirklicht). Anfangs bietet es sich (daher) an, die Achsen vertikal zu legen, danach horizontal und später (besonders beim Finden!) auch in weicher horizontalen noch vertikalen legen. Dies fördert die Beweglichkeit des Denkens.

- DGS: Dynamische Geometrie - Software

Ab der 6. Klasse werden auch die verschiedenen besonderen Vierecke behandelt. In dem Programm kann das jeweilige Viereck durch Bewegung einzelner Punkte schnell und ohne großen Konstruktionsaufwand verändert werden. Durch Eingabe der Mittelsenkrechten und Diagonalen, die oft (aber nicht immer) Sym.-Achsen sind, kann untersucht werden bzw. sehr gut veranschaulicht werden, wann bzw. ob die Symmetrie für ein bestimmtes Viereck durch Veränderung gewahrt bleibt oder nicht

Bsp.: Raute



Auseinanderzeichnen des Punktes C zu F. Damit Figur Raute bleibt verändern sich D und G.

Auch die S-Achsen verändern sich, aber die Symmetrie bleibt erhalten (Diagonalen nicht Mittelsenkr. sind S-Achsen).
Werden bspw. noch Winkel hinzugefügt, kann auch der Sonderfall des Quadrats

Der DGS bietet eine flexible Gestalltung und Veränderung von Figuren, i.B. bestimmter Vierecke. Dadurch können die S Zusammenhänge und variable Punkte erkennen und verstehen lernen. (Hinsichtlich anderer Lernziele und Anwendungsbereiche bietet die DGS auch zahlreiche Vorteile, wie das Verknüpfen von Konstruktionen etc. aber es sollte immer nur zusätzlich zu selbsttätigen Unterrichtseinheiten stattfinden, um das Verstehen über verschiedene Kanäle erfolgen zu lassen. So sollen S Grundkonstruktionen von Symmetrien u.a. auch immer selbst beherrschen.

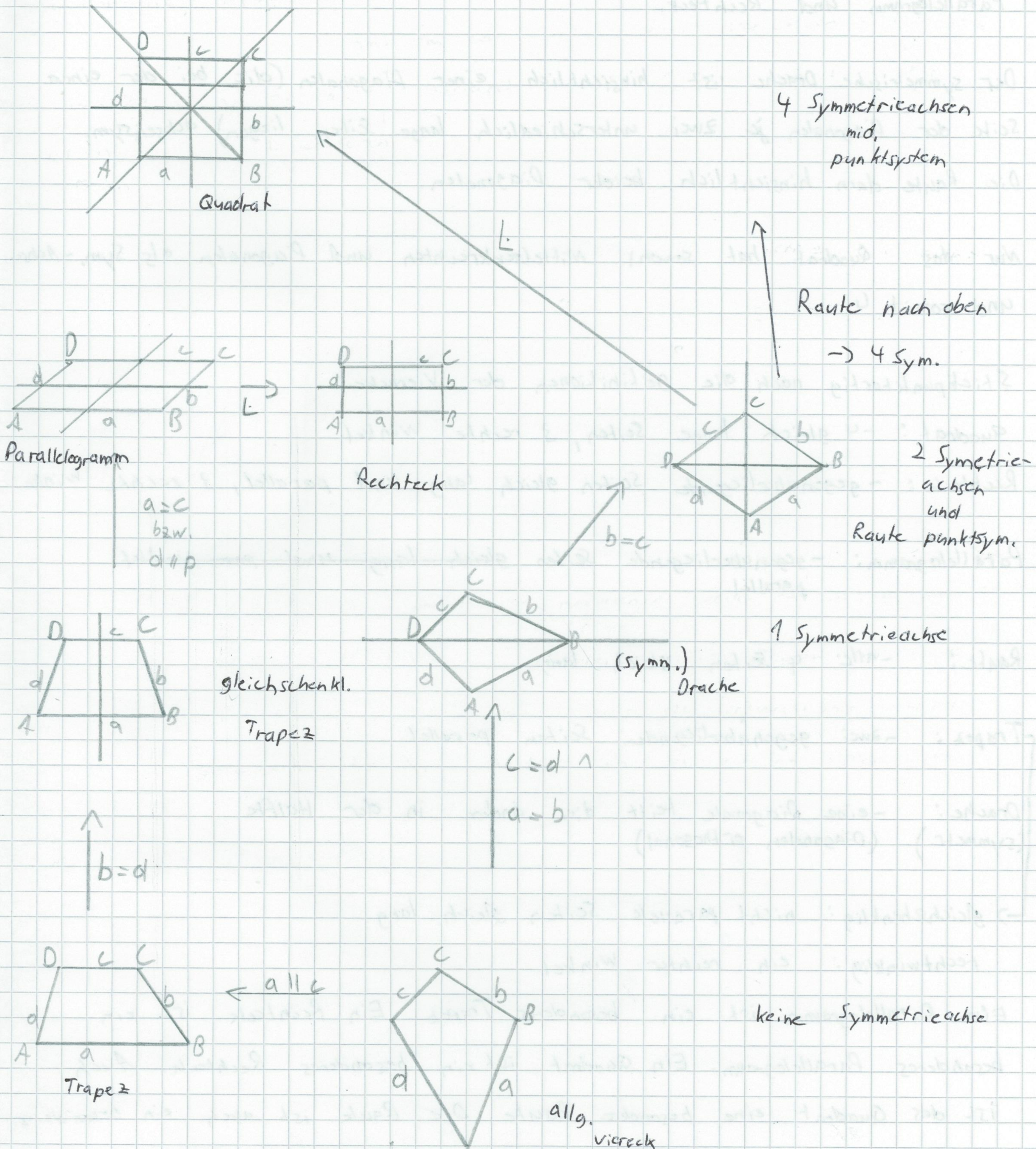
damit sie es auch wirklich verstanden haben!

- Andere handlungsorientierte Aktivitäten wie das Geobrett, das Tangram, Übereinanderlegen von ~~T~~ transparenten Papierstreifen, Holzstäbe, die flexibel aneinander-geknüpft sind etc. bieten sich nur zweitrangig für Aktivitäten zur Achsensymmetrie an, auch wenn sicherlich immer Fälle oder einzelne Möglichkeiten bestehen. Da aber bisher beschriebende Aktivitäten sich besser eignen und aus zeitgründen, werden diese nicht ausführlich beschrieben.

Bedenkend ist auch, dass man immer handlungsoriente Vorgehensweisen (enalctive Ebene) mit bildlichen (ikonische Ebene) und sprachlichen / schriftsprachlichen (sybolische Ebene) Vorgehensweisen verknüpft. Nur so können sich Begriffsverständnis und Fähigkeiten erfolgreich entwickeln. Die hier dargestellten Aktivitäten lassen dies vielfältig zu.

4. Ordnung ebener Vierecke hinsichtlich Symmetrie

In folgendem Haus der Vierecke werden die verschiedenen besonderen Vierecke hinsichtlich ihrer Symmetrieeigenschaften geordnet dargestellt. Die Symmetrieachsen sind eingezeichnet.



Das allgemeine Viereck, das Trapez (auch das rechtwinklige) sowie der schiefe Drachen weisen keine Symmetrieeigenschaften auf.
Das gleichschenklige Trapez ist hinsichtlich der Mittelsenkrechte der parallelen Seiten achsensymmetrisch. Auch zur Mittelsenkrechte achsensymmetrisch sind Parallelogramm und Rechteck.

Der symmetrische Drache ist hinsichtlich einer Diagonalen (die bei der einen Seite der Diagonalen je zwei unterschiedlich lange Seiten liegen) achsensym.
Die Raute dann hinsichtlich beider Diagonalen.

Nur das Quadrat hat sowohl Mittelsenkrechten und Diagonalen als Sym.-Achsen und somit 4.

Stichpunktartig nach die Definitionen der Vierecke
Quadrat: - 4 gleich lange Seiten, 3 rechte Winkel
Rechteck: - gegenüberliegende Seiten gleich lang und parallel, 3 rechte Winkel

Parallelogramm: - gegenüberliegende Seiten ~~gleich lang und par, parallel~~
parallel

Raute: - alle 4 Seiten gleich lang

Trapez: - zwei gegenüberliegende Seiten parallel

Drache: - eine Diagonale teilt die andere in der Hälfte
(symmetr.) (Diagonalen orthogonal)

→ gleichschenklig: nicht parallele Seiten gleich lang
rechtwinklig: ein rechter Winkel
Ein Parallelogramm ist ein besonderes Trapez. Ein Rechteck ist ein besonderes Parallelogramm. Ein Quadrat ist ein besonderes Rechteck. Auch ist das Quadrat eine besondere Raute. Die Raute ist auch ein besonderes