

Thema 1

Aufgabe 1

Definition:

Eine Kongruenzabbildung ist eine längentreue Abbildung, die eine Ebene auf sich abbildet. Zwei Figuren sind kongruent, wenn sie sich durch eine Kongruenzabbildung auf einander abbilden lassen. \times

Beispiele für Kongruenzabbildungen:

- Achsen Spiegelung
- Drehung
- Translation bzw. Parallelverschiebung

Eigenschaften von Kongruenzabbildungen:

Kongruenzabbildungen sind laut Definition längentreu.

Sie sind des Weiteren winkeltreu, das heißt, dass beispielsweise 2 kongruente Dreiecke in ihren Winkelmaßen übereinstimmen. Sie sind ebenfalls Strecken- und Flächentreu.

Weiteres Merkmal einer Kongruenzabbildung ist, dass Figuren immer auf kongruente Figuren abgebildet werden. Eine kongruente Abbildung eines Dreiecks ergibt also wieder ein Dreieck.

Die Eigenschaft „orientierungstreu“ ist nicht für alle Kongruenzabbildungen charakteristisch. Zum Beispiel liegen nach der Achsen Spiegelung eines Dreiecks zwei Dreiecke vor, die nicht zueinander orientierungstreu sind. Die Eigenschaft „orientierungstreu“ kann deswegen nicht als kennzeichnende Eigenschaft einer linearen Abbildung definiert werden, kann aber bei einigen Kongruenzabbildungen, wie z.B. der Drehung erfüllt sein.

Begriffsabgrenzung

Im Gegensatz zu Kongruenzabbildungen spricht man von Ähnlichkeitsabbildungen, wenn diese ähnliche Figuren erzeugen, diese aber nicht notwendigerweise längentreu sind. Man spricht bei diesen dann von der Eigenschaft, teilverhältnistreu sind. ~~Man spricht bei diesen dann von, wie zum Beispiel bei der zentrischen Streckung.~~

Sonderfall

Wenn eine Figur durch eine kongruente Abbildung, auf sich selbst abgebildet wird, wie es zum Beispiel bei symmetrischen Figuren der Fall ist, wird dies als invariant bezeichnet.

Im Allgemeinen lassen sich Figuren auf Kongruenz durch Überprüfung der bereits beschriebenen Eigenschaften prüfen.

Bestimmung einer Kongruenzabbildung (im Allgemeinen)

- Benennung der Punkte (Ecken), Seiten, Winkel
- Bestimmung des Orientierungssinn der beiden Figuren
- Figuren in kartesisches Koordinatensystem übertragen und die Koordinatenvektoren bestimmen
- die Koordinatenvektoren der Bilder und der Urbilder in Polar koordinaten $x = (r \cos \varphi; r \sin \varphi)$ für $r \in \mathbb{R}$ und $\varphi \in [0; 2\pi]$ übertragen
- Matrix der Form
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi & \pm r \sin \varphi \\ r \sin \varphi & \pm r \cos \varphi \end{pmatrix}$$
 aufstellen

und die zugehörige Determinante bestimmen.

Handelt sich um die darstellende Matrix A der Form

$A = \begin{pmatrix} r \cos \varphi & r \sin \varphi \\ r \sin \varphi & -r \cos \varphi \end{pmatrix}$ und beträgt die Determinante $\cong -1$, handelt es sich um eine Kongruenzabbildung der Art einer Drehung.

Besitzt die Darstellende Matrix B , die Form

$B = \begin{pmatrix} r \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ r \sin \varphi & -r \cos \varphi \end{pmatrix}$ und die Determinante beträgt $+1$ handelt es sich um eine Achsenspiegelung.

Drehung:

Die Strecke des Bildpunktes und des Drehpunktes $[MP']$ besitzt die gleiche Länge wie die Strecke des Urbildes und des Drehpunktes $[MP]$. Der Drehpunkt ist dabei Fixpunkt. Es wird um einen Drehwinkel α α α gedreht, so dass die Punkte P und P' auf einer Kreislinie liegen.

Aufgabe 2

Für die Erarbeitung der Kongruenzsätze bietet sich das schülerorientierte Unterrichtsverfahren mit Schwerpunkt des entdeckenden Lernens an. Der Schüler entdeckt dabei selbstständig oder in Gruppenarbeit Eigenschaften von kongruenten Dreiecken und der Lehrer gibt unterstützende Hilfestellung.

Bevor der Weg zur Erarbeitung der Kongruenzsätze für Dreiecke diskutiert wird, wird dieser Weg im folgenden vorgestellt.

Dreiecke sind dem Schüler bereits aus der letzten Unterrichtsstunde bekannt.

In der heutigen Stunde stellt der Lehrer die Frage, wie viele Angaben

maximal gegeben sein müssen, damit ein Dreieck konstruiert werden kann und

zwar so, dass jeder andere, der dieses Dreieck konstruieren will, zum selben

Ergebnis kommt. Die Frage dient als Motivation und behandelt ein innermathe-

matisches Problem. Die Schüler stellen Vermutungen auf und diese werden an

der Tafel festgehalten.

Daraufhin bilden die Schüler 3-4er Gruppen und bekommen vom Lehrer verschiedene Angaben und den Arbeitsauftrag anhand dieser Angaben ein Dreieck zu konstruieren.

Der erste Arbeitsauftrag beinhaltet nur 2 Angaben (beispielsweise 2 Seitenlängen) und die Gruppen sollen versuchen ihre Konstruktionen auf ein Plakat zu zeichnen. Dieser Schritt der Gruppenarbeit ist arbeitsgleich. Anschließend bekommen die Schüler den Arbeitsauftrag aus 3 Angaben ein Dreieck zu konstruieren. Die Gruppe A-D gibt es je 2x. Hierbei wird arbeitsteilig gearbeitet. Die Gruppe A erhält 3 Seitenangaben, die Gruppe B 3 Winkelangaben, die Gruppe C erhält die Angabe von 2 Winkeln und einer Seitenlänge. Die Gruppe D erhält die Angabe von 2 Seitenlängen und einem Winkel.

Daraufhin erhalten die Gruppen A und B 5 verschiedene Angaben, die Gruppe C und D 4 verschiedene Angaben. Die Arbeitsanweisung lautet wieder, dass Dreiecke anhand der erhaltenen Angaben konstruiert werden sollen.

Arbeitsauftrag beendet, werden die Plakate im Plenum vorgestellt und die Ergebnisse miteinander verglichen.

Der Lehrer wiederholt die Frage wie viel Angaben benötigt werden.

Anhand der Plakate wird herausgearbeitet, dass 2 Angaben nie ausreichen um Dreiecke so zu konstruieren, dass jeder zum gleichen Ergebnis kommt.

Des Weiteren erkennen die Schüler, dass 4 bzw. 5 Angaben immer ausreichen und dass es bei 3 Angaben darauf ankommt, welche Angaben es sind.

Die gewonnenen Erkenntnisse werden nun mit den Vermutungen, die von den Schülern zu Beginn der Stunde aufgestellt wurden, verglichen.

Im Anschluss daran erläutert der Lehrer den Begriff kongruent. Die gewonnenen Ergebnisse der Gruppenarbeit fließen in die Präsentation der Kongruenzsätze mit ein. Die Kongruenzsätze lauten: 2 Dreiecke sind kongruent, wenn sie:

- in 3 Seitenlängen übereinstimmen (SSS)

in 2 Winkeln und einer Seite übereinstimmen (WSW)

- in 2 Seiten und einem Winkel, der der kleineren Seite gegenüberliegt + über-
einstimmen (SSW).

Da jetzt ein Weg zur Erarbeitung der Kongruenzsätze vorgestellt wurde, soll dieser nun diskutiert werden.

Erarbeitung der Kongruenzsätze durch den Schüler bewirkt, dass der Schüler selbst tätig wird und Einsichten erhält.

Der Unterricht ist somit prozess- statt produkt-orientiert. Diese Prozessorien-
tierung ist eine Forderung des modernen Mathematikunterrichts. Nicht das
Produkt „Kongruenzsätze“ stehen somit im Mittelpunkt des Unterrichts, sondern
der Weg dorthin, der sogenannte Prozess. Die Schüler entwickeln das Gefühl, den
Inhalt selbst erarbeitet zu haben.

Des Weiteren bringt diese Art des Unterrichts den Vorteil, die in den Bildungs-
standards geforderten Kompetenzen, wie beispielsweise das Kommunizieren und das
mathematische Argumentieren zu schulen.

Diesen Vorteilen stehen die Nachteile einer aufwendigen Planung und einem
höheren Zeitaufwand, als es beispielsweise im Lehrerzentrierten Unterrichtsvortrag
der Fall ist, gegenüber. Bei der Abwägung der Vor- und Nachteile wird aber sofort
deutlich, dass die Vorteile aus pädagogischer und fachdidaktischer Sicht stärker
zu gewichten sind. Sich als Schlussfolgerung ergibt, dass schülerorientiertes
Unterrichtsverfahren, zur Erarbeitung der Kongruenzsätze zu bevorzugen ist.

Aufgabe 3

Die Verkettung von Achsenspiegelungen spielt im Lehrplan der Realschule bei
Drehungen und Translationen bzw. Parallelverschiebungen eine Rolle.

Die Achsenspiegelung wird in der 6. Jahrgangsstufe behandelt und in der
7. Jahrgangsstufe werden Drehungen und Translationen als neue Kongruenz-
abbildungen von den Schülern entdeckt.

kann, als Verkettung ~~z~~ zweier Achsenspiegelungen die einen gemeinsamen Schnittpunkt gemeinsam haben verstanden werden.

Als unterrichtliche Aktivität, die bei der Verkettung von Achsenspiegelungen eine Rolle spielt, ist der Arbeitsauftrag eine Figur zu drehen. Mögliche Aktivitäten sind: die Schüler pausen das Dreieck mit Transparentpapier ab ~~u~~ und drehen das Blatt beliebig, allerdings bleibt das Drehzentrum fest (Drehzentrum ist Fixpunkt). Weitere Möglichkeit ist das Arbeiten mit einem dynamischen Geometrieprogramm wie beispielsweise Geogebra. Dies ermöglicht die Visualisierung. Diese beiden Möglichkeiten sollen nun unter didaktischen Gesichtspunkten erläutert werden. Wie bereits angesprochen, helfen dynamische Geometrieprogramme die Visualisierung zu erleichtern. Sie können allerdings nur dann im Unterricht eingesetzt werden, wenn die Schule über entsprechende Ausstattung mit Computern verfügt und die Schüler über die notwendigen Fertigkeiten im Umgang mit einer dynamischen Geometriesoftware, wie z.B. Geogebra besitzen bzw. leicht erlangen können. Der Vorteil beim Abpausen auf Transparentpapier und anschließender Drehung ist, dass es der Schüler erarbeitet und nicht der Computer. ① Da verschiedene Lerntypen anhand unterschiedlicher Aktivitäten zum für sie günstigsten Lernerfolg gelangen, ist es sinnvoll, dass die Lehrkraft dem Schüler mehrere Zugänge ermöglicht und die Erarbeitung von Verkettungen von Achsenspiegelungen vielfältig ermöglicht

① Abschließend ist zu sagen: