Thema Nr. 2

Aufgabe 1

Bevor auf dem Begriff der quadratischen Funktion eingegangen wird sollen Grundlegende Begriffe die zum Verständnis von quadratischen Funktionen benötigt werden ~~erarbeitet~~ erläutert werden.

- Variable: eine Variable ist in der Mathematik ein Platzhalter für eine Rechengröße. Man unterscheidet die freie Variable von der gebundenen Variablen. Die freie Variable kann aus einer vorgegebenen Grundmenge frei gewählt werden. Die abhängige Variable ist abhängig von der freien Variablen. Ihr Wert wird also durch die freie Variable bestimmt.

- Term: Ein Term ist ein mathematisch sinnvoller Ausdruck, der Variablen, Zahlen und mathematische Symbole für Rechenzeichen enhält. Eine Zahl ist z.B. bereits ein Term und sinnvolle (d. h. der Syntax der Mathematischen Formelsprache entsprechen) verknüpfungen ebenfalls.

- Gleichung: In einer Gleichung werden zwei Terme durch das mathematische ~~Gleichungs~~ Gleichheitszeichen („=") gleichgesetzt.

- Aussage: Eine Aussage ist ein mathematischer Ausdruck der entweder wahr oder falsch ist. (z.B. eine Gleichung)

- Aussageform: Enthält eine Aussage Variablen so nennt man sie Aussageform. Erst nach besetzten der Variablen mit Zahlenwerten kann eine Aussage gemacht werden ob sie richtig oder falsch ist.

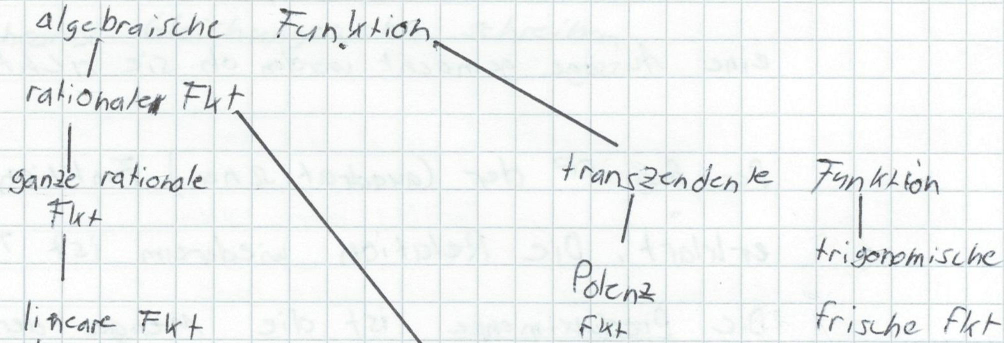
Der Begriff der (quadratischen) Funktion wird über die Relation erklärt. Die Relation wiederum ist Teilmenge der Produktmenge. Die Produktmenge ist die Menge der geordneten Paare, wobei

Element aus b von B. ($A \neq \emptyset$ und $B \neq \emptyset$)

Eine Relation R ist eine Teilmenge der Produktmenge. Seien A und B wieder zwei nicht leere Mengen, dann heißt die Teilmenge $A \vee B = \{a, b\} \mid a \in A \wedge b \in B\}$ (reelle) Relation von A zu B. Die Einschrankung, die die Relation im Gegensatz zur Produktmenge erhält ist eine Relationsvorschrift. Die Elemente aus A, welche Definitionsmenge genannt wird stehen also in einer bestimmten Beziehung zu den Elementen aus B, welche Wertemenge genannt wird. Nur Zahlenpaare die dieser Vorschrift genügen gehören zur Relation. Es gilt $R \subset A \times B$

- Funktion:

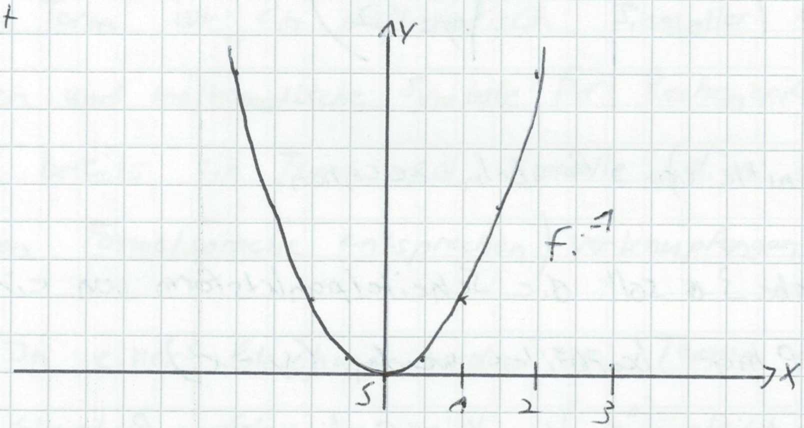
Eine Relation $R \subset A \times B$ mit $A \subset \mathbb{R}$ und $B \subset \mathbb{R}$ heißt (reelle) Funktion von A in B, geschrieben $f: A \to B$, wenn es zu jedem $x_B \in A$ genau ein $y_0 \in B$ gibt mit $(x_0, y_0) \in f$; Wie bei der Relation nennt man bei der Funktion die Elemente $x_0 \in A$ Definitionsmenge P und die zugehörigen Elemente $y_0 \in B$ Wertemenge. Der Unterschied zwischen Relation und Funktion ist die Eindeutigkeit der Zuordnung. Jede Funktion besitzt eine Funktionsgleichung $y = f(x)$ wobei $f(x)$ den Funktionsterm mit der freien variablen $x \in A$ entspricht. Die gebendene Variable $y \in B$ ergibt sich als Funktionswert durch einsetzen von X in die Gleichung. Man schreibt $f: x \mapsto y = f(x), x \in Df$. Im Koordinatensystem wird die Definitionsmenge an der X-Achse abgetragen und die Wertemenge an der Y-Achse. Bevor die quadratische Funktion nun genauer beschrieben wird soll sie in ein Begriffsnetz von Funktionen eingeordnet werden.



Die quadratische Funktion entspricht einer ganzrationalen Funktion, zweiten Grades. Eine Funktion mit der ~~der~~ Funktionsgleichung $y = ax^2 + bx + c$ ~~a,f~~ $a,b,c \in \mathbb{R}$ nennt man quadratische Funktion. Der zugehörige Graph dieser Funktion im Koordinaten System ist eine Parabel.

- <u>Def. Parabel</u>: Eine Parabel ist der geometrische Ort aller Punkte, die von einem fest vorgegebenem Punkt P und einer Geraden g den gleichen Abstand besitzen.

Zur genaueren Erläuterung soll vorerst auf die reinquadratische Gleichung $y = x^2$ eingegangen werden. ($\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $\mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$). Sie besitzt als Graph die Normalparabel, welche ihren Scheitel S im Nullpunkt hat. Eine quadr. Fkt hat keine Umkehr Fkt. welche auf dem kompletten Werte- bzw. Definitionsbereich definiert ist



verschiebt man die Normalparabel um den Vektor $\binom{x_S}{y_S}$ so ergibt sich die Funktion $y = x^2 + bx + y$. Man kann diese Funktion umschreiben in die sog. Scheitelpunktsform $y = (x - x_S) + y_S$. Das Positive an der Scheitelpunktform ist, dass man den Scheitelpunkt direkt ablesen kann und die Normalparabel somit leicht am verschobenen Scheitelpunkt zeichnen kann. (d. h. man braucht keine Wertetabelle)

Durch den Parabeter a, welchen wir nun beschreiben wollen ($y = a \cdot x^2 + bx + c$) wird die Öffnungsrichtung und die Gestalt der Parabel verändert

$a > 0 \Leftrightarrow$ Öffnung der Parabel nach oben

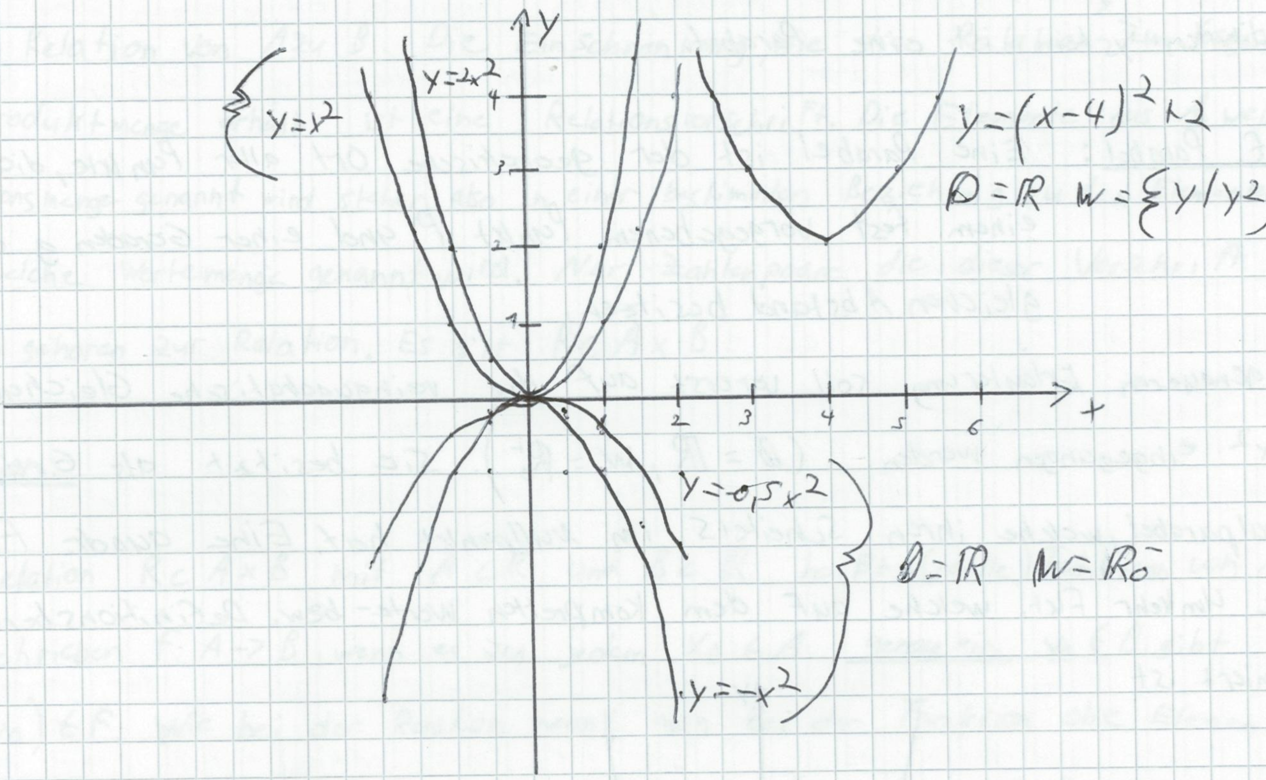
$a < 0 \Leftrightarrow$ Öffnung der Parabel nach unten

$|a| > 1 \Leftrightarrow$ die Parabel wird gestreckt (schmaler)

$|a| < 1 \Leftrightarrow$ die Parabel wird gestaucht (breiter)

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$

$\mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$



Man kann immer nur Ausschnitte von Parabeln zeichnen.

Im Hinblick auf Aufgabe 3 soll die Scheitelpunktsform von einer verschobenen Normalparabel P hier bearbeitet werden. $(y = x^2)$

Bzgl. der Normalparabel kann man die darauf liegenden Punkte P allgemein beschreiben mit $p = \binom{x}{y} = \binom{x}{x^2}$. Es soll nun diese Parabel um den Vektor $\vec{v} = \binom{x_s}{y_s}$ verschoben werden, so dass die Punkte P' entstehen, welche die Punkte der gesuchten verschobenen Normalparabel darstellen.

$$\binom{x}{x^2} + \binom{x_s}{y_s} = \binom{x + x_s}{x^2 + y_s} = \binom{x'}{y'}$$

Dies lässt sich als lineares Gleichungssystem schreiben

$\mathrm{I}\ x' = x + x_s$

$\mathrm{II}\ y' = x^2 + y_s$

~~Lässt~~ Löst man I nach x auf und setzt es in II ein, so kann man den Parameter x eliminieren.

$I \quad x = x' - x_S$

$I \text{ in } II \quad y' = (x' - x_S)^2 + y_S$

So erhält man die Scheitelpunktsform der verschobenen Parabel.

Ausgehend von der Funktionsgleichung $y = ax^2 + bx + c$ kann die quadratische Fkt. durch quadratisches Ergänzen erarbeitet werden.

Aufgabe 3

Bevor ich den Verlauf des Unterrichts beschreibe möchte ich einige Vorbemerkungen anbringen:

Die Quadratische Funktion wird in der 9. Klasse eingeführt. Die Schüler kennen bereits die lineare Funktion und die verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten der linearen Funktionsgleichung. Zudem wurden auch lineare Gleichungen und Gleichungssysteme behandelt, mit denen die Schüler vertraut sind und rechnen können. Ebenfalls können die Schüler graphisch, rechnerisch und mit Lösungsformel die Lösungsmenge von quadratischen Gleichungen bestimmen. Die Schüler können Wertetabellen anfertigen und die zugehörigen Grafen zeichnen. Die Unterrichtsstunde in der die Scheitelpunktsform eingeführt bzw. erarbeitet wird stellt die dritte ~~Unterrichtszeit~~ Unterrichtseinheit zu quadratischen Funktionen da. Die Schüler kennen die Normalparabel und die zugehörige Funktionsgleichung ($y = x^2$). Die Funktion und ihr Graph wurde auf Eigenschaften wie „gibt es eine Umkehrfunktion?" oder „Erkennst du eine Symmetrie im Graphen" untersucht.

Die Schüler sollen in dieser Stunde selbstständig die Scheitelpunktsform der quadratischen Funktion erarbeiten (bzgl. der Normalparabel!)

1.) Kopfrechenphase

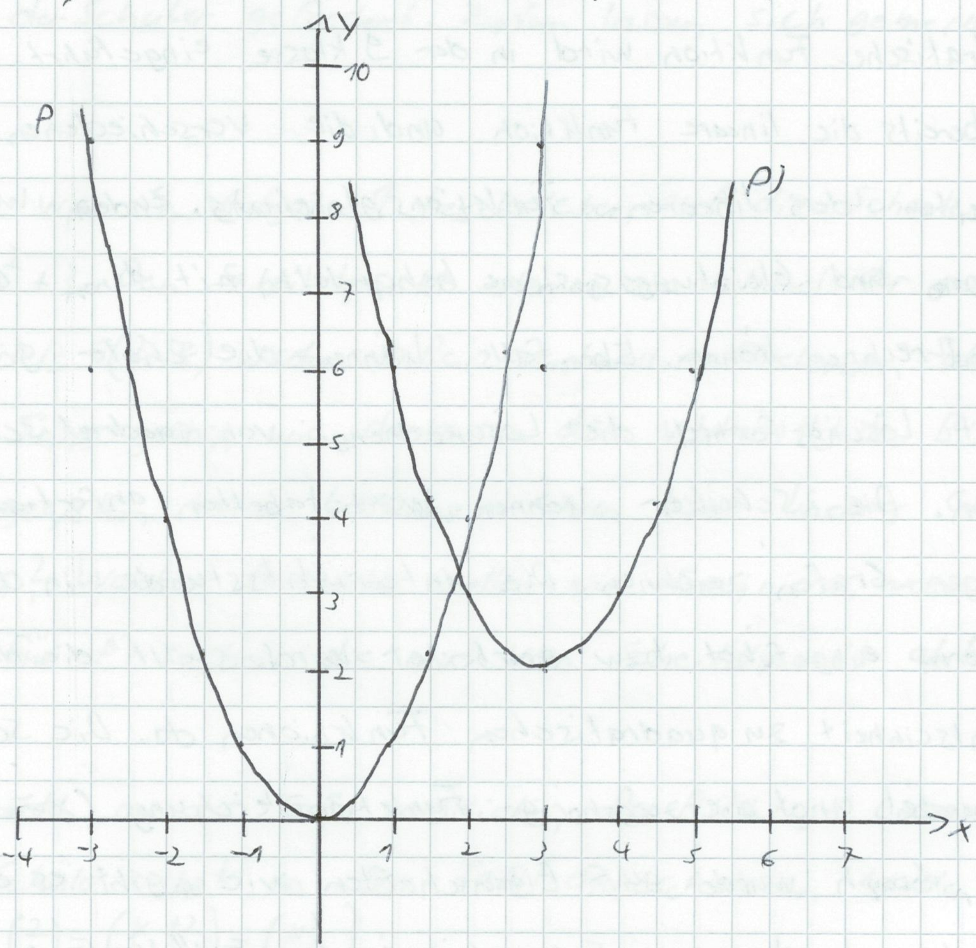
Auf dem OHP wird, im Koordinatensystem eingezeichnet, die Normalparabel aufgelegt. Die Schüler sollen die bereits erlangten Kenntnisse über die reinquadratische Funktion wiederholen.

Didaktische Bemerkung: Aktivierung von Vorwissen

2.) Einstieg

Die Schüler bekommen vom Lehrer eine quadratische Funktionsgleichung gegeben. (Tafelanschrift: $y = x^2 - 4x + 7$ Die Schüler bekommen den Auftrag eine Wertetabelle vom $0 \leq x \leq 6$ anzufertigen und einen Grafen zu zeichnen.

Nachdem die Schüler dies erledigt haben, darf ein Schüler seinen Graphen in das Koordinatensystem am OHP einzeichnen.



Der Lehrer fragt: „Fallen euch gemeinsamkeiten zwischen den Graphen auf"

- Schüler: „beides Parabeln nur die eine ist verschoben"
- Lehrer: „wo ist der Scheitelpunkt?"
- Schüler: „P(3,2)

Didaktische Erklärung: Obwohl die Schüler die Funktionsgleichungart $y = x^2 - 4x + 7$ noch nicht kennen sind sie in der Lage Wertetabelle und Graphen zu zeichnen. Das Unbekannte soll die Neugierde der Schüler auf auf etwas neues wecken. Zudem wird hier das anfertigen von Wertetabellen und das genauen einzeichnen von Punkten in ein Koordinatensystem geübt.

Problemstellung

Durch ein Lehrer Schülergespräch wird herausgearbeitet, dass die Lage des Scheitelpunkts bei der gegebenen quadratischen Funktion genügt hätte um die Normalparabel an den richtigen Ort zu zeichnen. (die Schüler kennen nur nach oben geöffnete Normalparabel bis jetzt). Dies wird realisiert durch Vergleich der Funktionswerte von P und P'.

Der Lehrer schreibt die Problemstellung an die Tafel: „Es soll eine Funktionsgleichung gefunden werden, bei welcher man den Scheitepunkt der Parabel direkt ablesen kann.

Did. Anmerkung: Das schriftliche Festhalten des Problems des Stundenziel (dies ist ein Ritual jeder Stunde) wissen die Schüler was auf sie zukommt und in welche Richtung sie Arbeiten sollen.

Arbeitsauftrag:

Der Lehrer legt eine Folie mit dem Arbeitsauftrag auf:

1.) Zeichne eine Grundparabel P (Scheitel) neben deine bereits gezeichnete Parabel in dein Koordinatensystem.

2.) Zeichne 3 beliebige Verschiebungsvektoren $\vec{v}$ in das Koordinatensystem welche ~~in das Koordinatensystem~~ P nach P' verschieben. Welche Koordinaten hat $v = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$

Hinweis: Vergiss den Scheitelpunkt nicht.

3.) Die Punkte auf P werden mit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix}$ bezeichnet. Sie beziehen sich auf die Funktion $y = x^2$. Durch welche Gleichung kann man die Punkte auf P' darstellen, wenn sie durch $\vec{v}$ verschoben werden?

Erarbeitungsphase

Diesen Arbeitsauftrag sollen die Schüler in 4er Gruppen bearbeiten.

Did. Bemerkung: durch das lösen der Aufgabe in Kleingruppen wird die soziale Kompetenz der Schüler gefordert. Zudem lassen sich gemeinsam eher Lösungen finden.

Die Schüler sollen wie in Aufgabe 1 beschrieben auf die Scheitelpunktsform gelangen $(y' = (x'-2)^2 + 3)$. Den Scheitelpunkt erkennen sie anhand der gegebenen Zahlen des Scheitels $S(2|3)$ wieder. Bei eventuell auftretenden Schwierigkeiten kann der Lehrer Tipps geben wie denke an die Vektoradition. Bilde ein lineares Gleichungssystem. Welche Lösungsverfahren bzgl. lineares Gleichungssystem kennst du? Welchen Parameter wollen wir eliminieren wenn wir eine Parabelgleichung für P' suchen die nur vom Scheitelpunkt abhängt?

Ergebnisphase

Die Ergebnisse werden an der Tafel verglichen. Der Richtige Lösungsweg kann von einem Schüler selbst an der Tafel angeschrieben werden

Tafel: $\begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2 \\ x^2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

Lösung: $\left.\begin{array}{l} \text{I. } x' = x+2 \\ \text{II } y' = x^2+3 \end{array}\right\}$ eliminieren von x

→ Did. Anmerkung: das Selbständige schreiben der Lösung von einem Schüler selbst soll den Schülern noch ~~eifriger machen~~ ~~verdeutli~~ verständlicher machen, dass sie selbst auf die Lösung des Problems gekommen sind. Forderung der Kommunikation der Schüler die Musterlösung soll später helfen sich in das Problem hinein zu denken.

Sicherung

- Das Ergebnis soll noch einmal allgemein im Heft festgehalten werden.

Hefteintrag

Die Scheitelpunktsform einer quadratischen Funktion:

$y = (x - x_S) + y_S$ wobei $S = (x_S, y_S)$

der Scheitelpunkt der Parabel ist.

Did.: Eine allgemeine Form saviert als Hefteintrag formuliert erleichtert das spätere Anwenden. Die Informationen können allgemein gelernt werden.

Festigung:

- weitere Übungsaufgaben sollen das neu erworbene Wiese festigen. (Rest Hausaufgabe)
- zeichne die zugehörigen Graphen und schreibe bei Bedarf die Funktionsgleichung in die Scheitelpunktsform um und fertige Wertetabellen an.

- $y = (x-5)^2 + 10$

  $y = (x+2)^2 - 3$

  $y = x^2 + 2x + 8$

  $y = x^2 - 5x + 35$

Did. Anmerkung: die Schüler können ihr neu erworbenes Wissen anwenden und gleichzeitig mit altem Wissen verknüpfen.

Da $y = (x-5)^2 + 10 = x^2 - 5x + 35$ kommen die Schüler darauf, dass die beiden Funktionsgleichungen den selben Wert beschreiben. Dies soll in

Aufgabe 2

In Aufgabe 1 wurde bereits eine allgemeine Definition zu Gleichungen, Aussage, Aussageform, variablen und Term gegeben. Deshalb beschränkte ich mich hier auf die Definition einer quadratischen Gleichung.

Eine Gleichung der Form $ax^2+bx+c=0$ mit $a\neq 0, b, c \in \mathbb{R}$ nennt man quadratische Gleichung. Im Allgemeinen ~~heißt~~ heißt die Gleichung lösbar, wenn beim Einsetzen von Zahlen in die Variablen eine wahre Aussage entsteht. Alle Zahlen, welche eine wahre Aussage bilden werden zur Lösungsmenge $\mathbb{L}$ zusammengefasst. Bei quadratischen Gleichungen ist $\mathbb{L}=\{x\}$; $\mathbb{L}=\{x_1, x_2\}$, $\mathbb{L}=\emptyset$. D.h. eine Quadratische Gleichung hat höchstens zwei Lösungen. Die Menge aus der die Zahlen x ~~entkommen~~ entstammen nennt man Grundmenge.

Es gilt $\mathbb{L} \subset \mathbb{G}$.

Die Reinquadratische Gleichung $ax^2+c=0$ ist durch Radizieren lösbar,

$ax^2=-c$ $\quad -\frac{c}{a}<0 \Rightarrow$ keine Lösung

$x^2=-\frac{c}{a}$ $\quad -\frac{c}{a}=0 \Rightarrow x=0$

$x^2=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ mit $\quad -\frac{c}{a}\geq 0 \Rightarrow 2$ Lösungen

Lösungsverfahren:

Rechnerisch: um die allg. Quadratische Gleichung wie die Reinquadratische Gleichung durch Radizieren lösen zu können, muß quadratisch ergänzt werden:

$$ax^2+bx+c=0$$

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)+c=0$$

$$a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right)+c=0$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-c+\frac{b^2}{4a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2} \quad \Big| \sqrt{\ }$$

Wert unter der Wurzel gibt Anzahl der Lösungen an

$>0 \rightarrow$ 2 Lösungen

$=0 \rightarrow$ 1 Lösung

$<0 \rightarrow \emptyset$

Bsp.: $2x^2+4x-4 = 2(x^2+2x+1)-2-4$

$= 2(x+1)^2-6 = 0$

$2(x+1)^2 = 6$ Fallunterscheidung

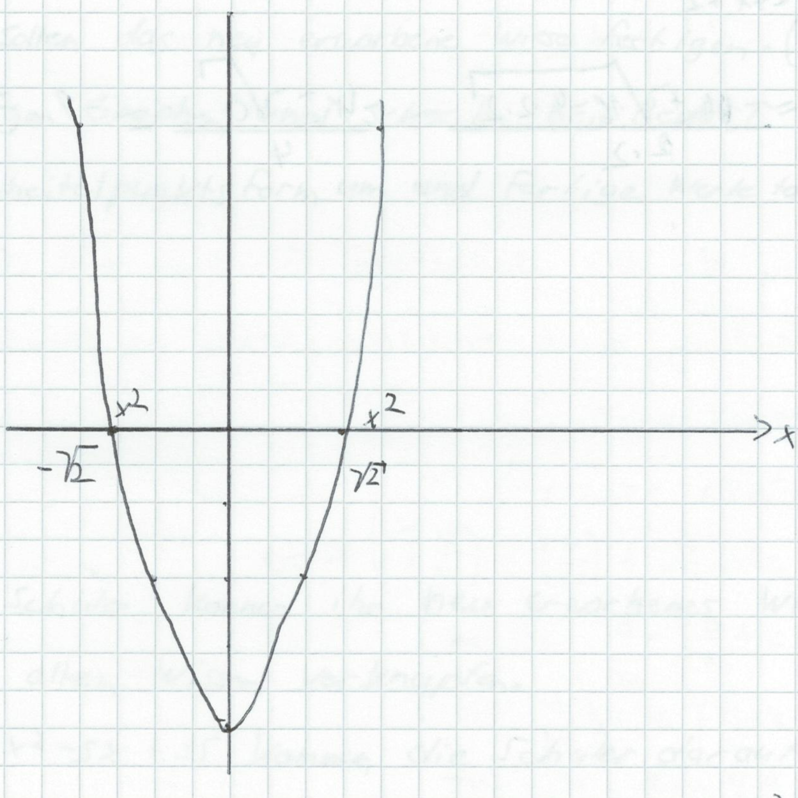
$(x+1)^2 = 3 \Leftrightarrow |x+1| = \sqrt{3} \Leftrightarrow x+1 = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$

$-x-1 = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$

$= 5 - \sqrt{3} - 1\sqrt{3}$

-grafisch: Eine quadratische Gleichung stellt, wenn man den linken Term der Gleichung betrachtet eine quadratische Fkt dar. Die Lösungen der Funktion sind die Nullstellen der Parabel (eine Parabel hat entweder eine, keine, oder zwei Nullstellen

Bsp: $2x^2-4$



Somit kann man die Nullstellen Ablesen $\mathbb{L} = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

- Lösungsformel:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

durch einsetzen der Koeffizenten von a, b, c der quadratischen Gleichung kann man die Lösung ermitteln. Anhand der Diskriminante $D = b^2-4ac$ kann man festellen wie viele Lösungen es gibt.

$D > 0 \Leftrightarrow$ es gibt 2 Lösungen

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$D = 0 \Leftrightarrow$ es gibt eine Lösung

$$x = \frac{-b \pm 0}{2a}$$

$D < 0 \Leftrightarrow$ es gibt keine Lösung da die Wurzelfunktion nicht für negative Zahlen definiert ist.

<u>**Bsp.**</u> $2x^2 + 4x + 2$

$$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4\cdot 2\cdot 2}}{2\cdot 2} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{4} = -1 \Rightarrow \mathbb{L} = \{0\}$$