Thema 2

Aufgabe 1

Eine quadratische Funktion ist eine Abbildung der Ebene, welche die Form ax^2+bx+c mit $a \neq 0$ besitzt.
Die Parameter a, b und c haben dabei unterschiedlichen Einfluss auf den Graphen der Funktion.

- a gibt die Öffnung der Funktion an. Ist $a>0$ ist die Parabel nach oben geöffnet, ist $a<0$ ist sie nach unten geöffnet. Für $|a|>1$ wird die Parabel außerdem gestreckt und für $|a|<1$ wird sie gestaucht

- Der Parameter c verschiebt die Parabel in y-Richtung
- Der Parameter b verschiebt die Parabel sowohl in x-Richtung als auch in y-Richtung

Aufgabe 2

Es gibt verschiedene Möglichkeiten quadratische Gleichungen zu lösen. Dabei kann man zuerst einmal gewisse Sonderfälle untersuchen:

1. Fall: Bei der quadratischen Gleichung $ax^2+bx+c=0$ ist der Parameter $\boxed{c=0} \Rightarrow ax^2+bx=0$

Dabei kann man diese Gleichung lösen, indem man die Variable x ausklammert: $x(ax+b)=0$. Nun ist ein Produkt mit zwei Faktoren entstanden. Ein Produkt dieser Form ist genau dann Null, wenn einer der beiden Faktoren gleich Null ist $\Rightarrow$ entweder $x_1=0$ oder $ax+b=0$, also $x_2=-\frac{b}{a}$ $(a \neq 0)$.

2. Fall: Bei der quadratischen Gleichung $ax^2+bx+c=0$ ist der Parameter $\boxed{b=0}$ $\Rightarrow ax^2+c=0$. Dabei gibt es 2 Lösungen, die man durch Äquivalenzumforderungen erhält.

$$ax^2+c=0 \quad |-c$$
$$ax^2=-c \quad |:a$$
$$x^2=-\frac{c}{a} \quad |\sqrt{}$$
$$x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Die Diskriminante (also der Term unter der Wurzel) darf allerdings nicht negativ sein, da dies in $\mathbb{R}$ nicht definiert ist. Also muss in diesem Fall gelten:

① $c<0$ und $a>0$ oder ② $c>0$ und $a<0$.

3. Fall Bei der quadratischen Gleichung $ax^2+bx+c=0$ gilt $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$. Die Lösungen dieser Gleichung erhält man durch das Auflösen nach x mit Hife der quadratischen Ergänzung und erhält daraus die sogenannte „Mitternachtsformel"

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Vorführung der Umformungen:

$$ax^2+bx+c=0 \quad |:a \qquad x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \quad | \text{ Quadratische Ergänzung}$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a} \quad |\sqrt{}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \quad \left|-\frac{b}{2a}\right.$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Es ist allerdings dabei zu beachten, dass die Quadratischen Gleichungen keinesfalls immer zwei Lösungen haben müssen. Anhand der Mitternachtsformel kann man gut diese Aussage bekräftigen. Die quadratische Lösung kann nämlich zwei, eine oder sogar keine Lösung besitzen.

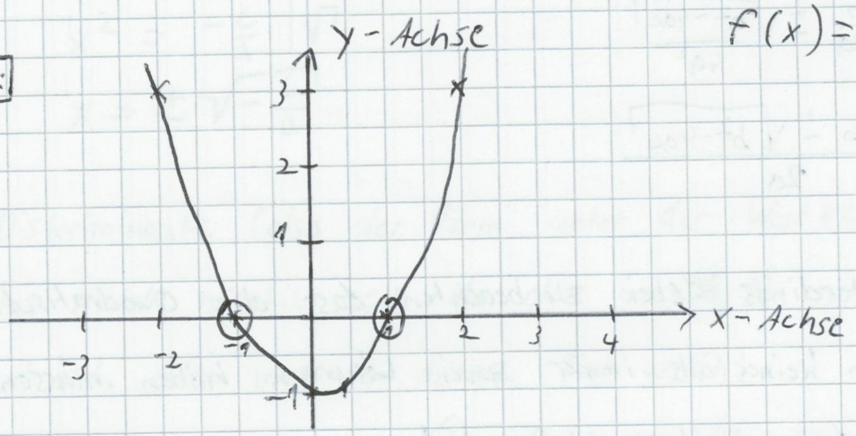
- Falls die Diskriminante $D=b^2-4ac>0$ hat die quadr. Gleichung zwei Lösungen
- falls $D=b^2-4ac=0$ hat die quadr. Gleichung genau eine Lösung
- falls $D=b^2-4ac \neq 0$ besitzt die quadr. Gleichung keine Lösung

Außerdem lässt sich die quadratische Gleichung nach graphisch lösen. Dabei geben die Schnittpunkte des Graphen mit der X-Achse die Lösung der Gleichung an. Hierbei kann wiederum auf die unterschiedlichen Fälle eingegangen werden:

<u>1. Fall:</u> Die quadr. Gleichung / Funktion besitzt zwei Lösungen

$f(x) = x^2 - 1$

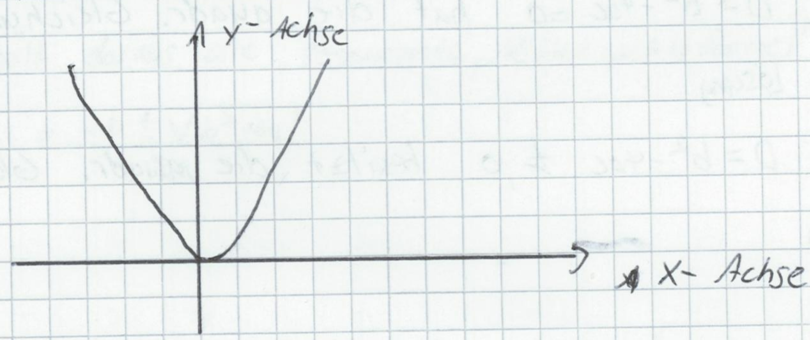
Skizze:



Lösungen sind $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$

<u>2. Fall:</u> Die quad. Gleichung / Funktion besitzt genau eine Lösung. Diese entspricht dem Berührpunkt der Funktion mit der X-Achse: $f(x) = x^2$

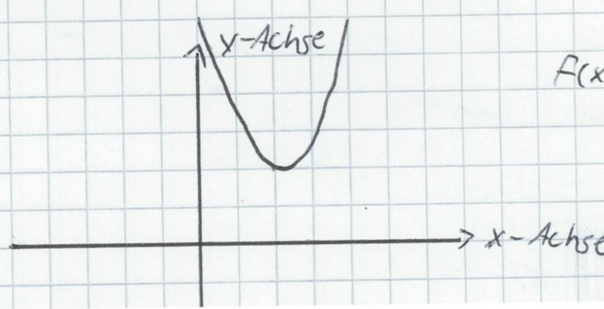
Skizze:



<u>3. Fall</u> Die quad. Gleichung / Funktion besitzt keine Lösung. Hier schneidet oder berührt der Graph die X-Achse nicht.

$f(x) = (x-1)^2 +$

Skizze:



Aufgabe 3 $\boxed{\text{Unterrichtsstunde}}$

1. Sachanalyse

Die Scheitelpunktform einer quadratischen Funktion erhält man durch Äquivalenzumformungen der allgemein quadratischen Funktionsgleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit Hilfe der quadratischen Ergänzung. Dies soll nun hier demonstriert werden:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(-\frac{b^2}{4a} + c\right)
\end{aligned}
$$

Scheitel ist hierbei $S\left(-\frac{b}{2a} \middle| -\frac{b^2}{4a} + c\right)$

2. Einbettung in die Unterrichtssequenz

Die Unterrichtseinheit vorher könnte die binomischen Formeln behandelt haben, die Unterrichtseinheit nach dieser Stunde könnte Extremwerte bzw. Extremwertaufgaben behandeln.

3. Lernvoraussetzungen

Die Schüler-Innen sollen die binomischen Formeln kennen und anwenden können.
Die SchülerInnen sollen mit dem Begriff „Funktionen" umgehn können und wichtige Eigenschaften von linearen Funktionen kennen.

- Die SchülerInnen sollen Wertetabellen erstellen können
- Die SchülerInnen sollen Funktionen (lineare) mit Hilfe einer Wertetabelle in ein Koordinatensystem einzeichnen können
- Die SchülerInnen kennen die Scheitelform $y = (x - x_S)^2 + y_S$

4. Lernziele

Grobziel: Die SchülerInnen sollen die Scheitelpunktform kennen lernen und an einfachen Beispielen anwenden können

Feinziele:
- Die SchülerInnen können die quadratische Ergänzung an einfachen quadratischen Funktionen durchführen
- Die SchülerInnen können den Scheitel einer Funktion bestimmen

5. Unterrichtsverlauf

Artikulationsschema	Artikulation	Medieneinsatz/ Methoden
Kopfgeometrie	Der Lehrer legt zu Beginn der Stunde eine Folie auf den Overhead projektor, auf der noch einmal Aufgaben zu binomischen Formeln stehen und wiederholt werden sollen. Folie: Forme zu einer binomischen Formel um 1.) $x^2+4x+4 \overset{?}{=}$ 2.) x^2-6x+9 3.) Ergänze damit eine	Folie / Plenum, Partnerarbeit

a) $x^2 + 8x + \boxed{} = (x + \boxed{})^2$

b) $x^2 - 4x + \boxed{} = (x - \boxed{})^2$

c) $x^2 + \boxed{} + 1 = (x + 1)^2$

d) $x^2 + \boxed{} + 9 = (x + \boxed{})^2$

Die Schüler ~~innen~~ Innen sollen sich zuerst mit ihren ~~Siz~~ Sitznachbarn über die Aufgaben austauschen. Anschließend wird eine Schülerin bzw ein Schüler der Klasse zum Overheadprojektor gebeten und ~~sie~~ soll die Lösung auf die Folie eintragen.

Lösungen:

1.) $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$

2.) $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$

3.)

a) $x^2 + 8x + \boxed{16} = (x + \boxed{4})^2$

b) $x^2 - 4x + \boxed{4} = (x-2)^2$

c) $x^2 + \boxed{2x} + 1 = (x+1)^2$

d) $x^2 + \boxed{6x} + 9 = (x+3)^2$

Damit wird schon das Ergänzen von Zahlen geübt, welches man für die quadratische Ergänzung benötigt.

Artikulationsschema	Medieneinsatz / Methoden
2 Einstieg / Motivation	Folie / Partnerarbeit

Der Lehrer legt anschließend eine weitere Folie auf den Overheadprojektor mit folgender Aufgabe:

$$x^2 + 2x + 2$$

Die SchülerInnen fangen an zu Murmeln, bis Schüler 1 sagt: „Das ist eine binomische Formel"}

Lehrer: „Richtig. Ich möchte allerdings, dass ihr eine binomische Formel daraus macht". Und ich verspreche euch, dass ihr das am Ende der Stunde hinbekommt".

Dies stellt gleichzeitig die 3. Stufe des Artikulationsschemas dar, der Problemstellung

4 Schülervermutungen:

S1: Das kann ich nie!

S2: Das geht bestimmt ähnlich wie die Aufgabe 3 vorhin.

5 Erarbeitung Medien: Arbeitsblatt, Methode: Gruppenarbeit

Der Lehrer teilt die Klasse in zwei Gruppen ein. Der ersten Gruppe teilt er ein Arbeitsblatt mit folgender Funktion aus: $f(x) = x^2 + 6x + 12$

Der zweiten Gruppe teilt er ein Arbeitsblatt mit der Funktion $f(x) = (x+3)^2 + 3$ aus.

Die beiden Gruppen sollen dazu eine Wertetabelle im Intervall $x \in [-6; 3-1]$ berechnen und die Funktion dazu in einem Maßstab: 1 Kästchen ≙ 1 auf die Folie übertragen. Nach einigen Minuten tritt je ein Schüler von je einer Gruppe an des Tageslichtprojektors und legt seine Folie auf. Die Ergebnisse werden verglichen. Die SchülerInnen stoßen darauf, dass es sich um die gleiche Funktion handelt und, daher man irgendwie von der einen Form in die andere umformen können muss.

Lösung Guppe 1

X	−6	−5	−4	−3	−2	−1
(x;y)	12	7	4	3	4	7

Lösung Gruppe 2 ist identisch.

Lehrer: Ihr habt recht, man kann die eine Funktion umformen und erhält somit die zweite Funktionsgleichung.

Tafelanschrieb: siehe Teil Sachanalyse
(auch zur Sicherung)

Dies erarbeitet der Lehrer zusammen mit den SchülerInnen an der Tafel. Die quadratische Ergänzung wird durch ergänzen der „schlauen Null" erklärt
Anschließend wird dieses Verfahren durch Anwendungsaufgaben eingeübt und als Hausaufgabe werden ebenfalls einige Aufgaben zur Sicherung und Einüben aufgegeben.

z.B. a) $x^2 + 4x + 2$