Aufgabe 2

Ein guter Einstieg in die Ähnlichkeitslehre der Realschule findet über die zentrische Streckung statt. Anhand dieser Ähnlichkeitsabbildung lernen die Schüler sowohl Merkmale für eine Ähnlichkeitsabbildung kennen, als auch den Begriff „ähnlich" kennen. Deshalb schließt an die zentrische Streckung allgemein der Sachverhalt der Ähnlichkeitsabbildung mit ihren Eigenschaften an. Ausgehend von der Ähnlichkeitsabbildung (genauer: zentr. Streckung) können die Vierstreckensätze hergeleitet werden. Die Schüler sollen deren Eigenschaften und Anwendung lernen. Anschließend an die Ähnlichkeitsabb. lernen die Schüler vor dem Strahlensatz die Ähnlichkeitssätze von Dreiecken kennen und anwenden. Hierbei ist es hilfreich die bereits bekannten Kongruenzsätze für Dreiecke mit einzubeziehen.

Def. Ähnlichkeitsabbildung

Eine geometrische Abbildung nennt man eine Ähnlichkeitsabbildung, wenn sie

- eine zentrische Streckung
- eine Kongruenzabbildung
- oder eine Verkettung einer zentrischen Streckung mit einer Kongruenzabbildung ist.

Def. Ähnlichkeitsrelation

Zwei Figuren A und B heißen ähnlich, wenn die eine das Bild der anderen bei einer Ähnlichkeitsabbildung ist.

Aufgabe 3

1. Sachanalyse: siehe Aufgabe 1

2. Einbettung in die Sequenz:

Die Schüler haben in der vorangegangenen Unterrichtseinheit die Vierstreckensätze kennen gelernt.

3. Lernvoraussetzungen

Die Schüler sollen:

- die drei Vierstreckensätze kennen
- mithilfe von Ähnlichkeitsabbildungen Figuren vergrößern, verkleinern, verschieben, drehen und spiegeln können
- die Abbildungsvorschrift der zentrischen Streckung können und bei Problemen anwenden können

4. Lernziele

4.1 Grobziel:

Die Schüler sollen Vierstreckensätze zum Lösen von Problemen anwenden können

4.2. Feinziele:

Die Schüler sollen:

- bei den Aufgaben erkennen, welcher der drei Vierstreckensätzen zu benutzen ist
- erkennen, dass der Vierstreckensatz im Alltag anzuwenden ist

-an dem Problem erkennen, dass sie es mit dem Vierstreckensatz lösen können

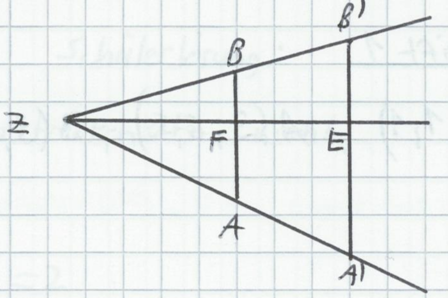
(- den engen Zusammenhang zwischen der zentr. Streckung und den Vierstreckensätzen erkennen, nur schnellere Schüler)

5. Stundenverlauf

Artikulationsstufe	Artikulation	Material
Kopfgeometrie	L: „Anhand einer Zentrischen Streckung wollen wir gemeinsam die gelernten Vierstreckensätze wiederholen". Ein Schüler führt die zentr. Streckung an der Tafel aus. L: „Was wissen wir jetzt über die Strecke $\overline{A'B'}$" Mögliche Schülerantworten: „Die Strecke $A'B'$ ist doppelt so lang, wie die Strecke $\overline{AB}$". „Das Verhätnis $\overline{A'B'} : \overline{BA}$ ist gleich dem Verhältnis der Längen von $\overline{ZA'} : \overline{ZA}$"	UG, Tafelanschrift 1
Problemstellung	L: „Das führt uns zu folgendem Problem: Der Bauer Hugo möchte über seinen Teich von der Stelle A' zu der Stelle B' eine Brücke bauen. Um zu wissen, wieviel Hölzer kaufen muss, braucht er die Länge der Strecke $\overline{A'B'}$. Wie kann Hugo diese Strecke berechnen?"	Tafelschrift 2
Erarbeitung	„Geht dazu in Gruppen zusammen und helft Hugo das Problem zu lösen. Notiert eure gemeinsame Lösung auf einer	GA, Arbeitsblatt 1, leere Folie

Artikulationsform	Artikulation	Material/ Arbeitsform
	Als Zwischenschritt vor der gemeinsamen Besprechung, sollen jeweils zwei Gruppen ihre Lösung vergleichen und bei Abweichung darüber diskutieren	GA
Verbesserung	Eine Gruppe soll ihr Ergebnis vorstellen und ihre Herangehensweise an das Problem erläutern. (Mögliche Schülerlösungen siehe Arbeitsblatt 1)	UG Overhead-projektor
Sicherung	Die richtige Lösung wird auf der Tafel festgehalten	Tafelanschrift 2
Übung		PA AB2
Hausaufgabe	L: „Zeichne ein beliebiges Dreieck ΔABC. In das Dreieck soll ein Quadrat so einbeschrieben werden, dass eine Seite auf der Dreiecksseite liegt und zwei Ecken des Qudrats die anderen beiden Seite a und b berühren. Tipp dazu: Zeichne ein Qudrat ein und verkleinere bzw. vergrößere es, um auf die Lösung zu kommen."	

Arbeitsblatt 2



1) Gegeben:

$\overline{A'B'} = 20m$

$\overline{ZA} = 10m$ $\qquad$ $\overline{ZA'} = 50m$

Ges.: $\overline{AB}$

Lsg.: $$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}} \Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{A'B'} : \left(\frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}}\right)$$

$$\Rightarrow \overline{AB} = 20m : \left(\frac{50m}{10m}\right) = 4m$$

2) Gegeben:

$\overline{ZA} = 25m$, $\overline{ZA'} = 50m$, $\overline{BB'} = 44m$

Ges.: $\overline{ZB}$

Lsg.: $$\frac{\overline{ZB'}}{\overline{ZB}} = \frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}} \Leftrightarrow \overline{ZB} = \overline{ZB'} : \left(\frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}}\right)$$

$$\overline{ZB} = 44m : \left(\frac{50m}{25m}\right) = 22m$$

3) Gegeben:

$\overline{EA'} = 3m$, $\overline{FA} = 1m$, $\overline{FB} = 1{,}5m$

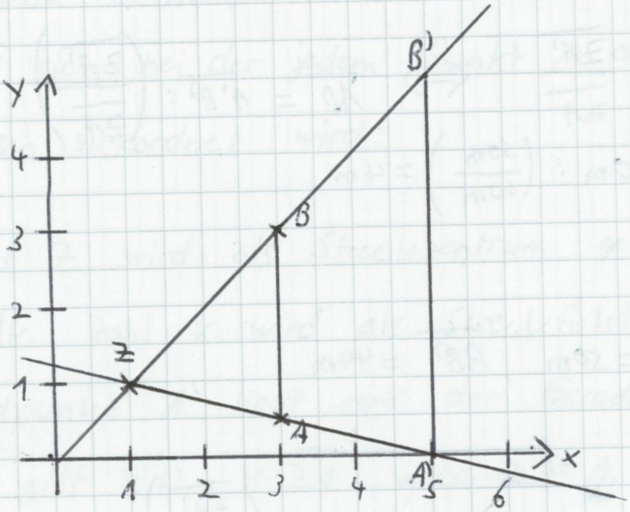
Ges.: $\overline{EB'}$

Lsg.: $$\frac{\overline{EA'}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{EB'}}{\overline{FB}} \Leftrightarrow \overline{EB'} = \frac{\overline{EA'}}{\overline{FA}} \cdot \overline{FB}$$

$$\overline{EB'} = \frac{3m}{1m} \cdot 1{,}5m = 4{,}5m$$

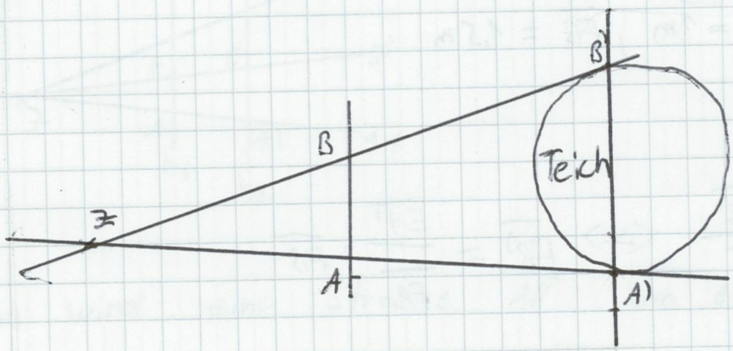
Tafelanschrift 1

Geg.: $Z(1;1)$, $A(3;0{,}5)$, $B(3;3)$, $k=2$



Arbeitsblatt 1

- Problemstellung (s. Unterrichtsverlauf)
- Skizze



Geg.: $\overline{AB} = 15m$, $\overline{ZA} = 35cm$, $\overline{ZA'} = 70m$

Lösung: $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}} \Leftrightarrow \overline{A'B'} = \frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}} \cdot \overline{AB}$

STA3)

$\Leftrightarrow \overline{A'B'} = \frac{70m}{35m} \cdot 15m = 30m$

Mögliche abweichende Schülerlösung:

- Schüler wenden den Vierstreckensatz nicht richtig an:

$$\overline{A'B'} = \frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}} \Rightarrow \overline{A'B'} = 2$$

- Schüler berechnen Lösung über zentrische Streckung:

$$k = \frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}} = 2 \qquad \overline{A'B'} = k \cdot \overline{AB}$$

$$\Leftrightarrow \overline{A'B'} = 2 \cdot 15\,m$$

$$\Leftrightarrow \overline{A'B'} = 30\,m$$

Diese kann als Aufgabe den sehr schnellen Schülern gegeben werden.

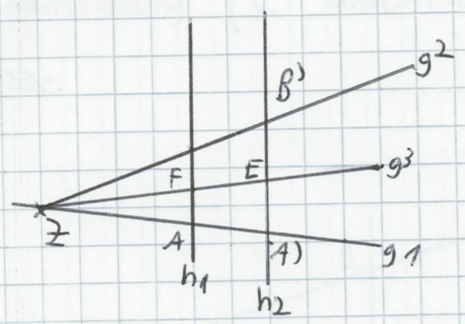
Aufgabe 1

Die Herleitung des Vierstreckensatzes kann über die Ähnlichkeitsabbildung der „Zentrischen Streckung" stattfinden.

Def. Zentrische Streckung

Die zentrische Streckung $S_{Z;k}$ ist eine Abbildung der Ebene auf sich, bei der jedem Punkt A der Bildpunkt A' folgendermaßen zugeordnet wird:

- Ein Punkt Z wird als Streckzentrum gewählt
- Ein reelle Zahl k wird als Streckfaktor festgelegt
- Der Bildpunkt A' liegt auf der Geraden ZA und es gilt $\overline{ZA'} = k \cdot \overline{ZA}$, wobei $Z \neq A$.
- Z ist ein Fixpunkt und wird auf sich selbst abgebildet, $Z = Z'$



$$k = \frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}}$$

Denn wird eine Strecke $\overline{AB}$ um ein Faktor k gestreckt, ist die Bildstrecke $\overline{A'B'}$ parallel zu $\overline{AB}$ und es gilt $\overline{A'B'} = k \cdot \overline{AB}$

Somit sind die Voraussetzungen des Vierstreckensatzes gegeben: es gibt zwei Geraden g1 und g2, die sich im Punkt Z schneiden und zwei Paralle Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{A'B'}$.

Aufgrund der Abbildungsvorschrift

$$\overline{ZB'} = k \cdot \overline{ZB} \Leftrightarrow k = \frac{\overline{ZB'}}{\overline{ZB}}$$

und $\overline{ZA'} = k \cdot \overline{ZA} \Leftrightarrow k = \frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}}$

ergibt sich der erste Teil der Vierstreckensätze, dass die Längen der Abschnitte der Geraden G1 zueinander den entsprechenden Längen der Abschnitte der Gerade g2 entsprechen.

Also $\frac{\overline{ZB'}}{\overline{ZB}} = k = \frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}}$

Auch der zweite Teil des Vierstreckensatzes kann so her geleitet werden, denn

$k = \frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}}$ und $\overline{A'B'} = k \cdot \overline{AB} \Leftrightarrow k = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$

$\Leftrightarrow \frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{A'B'}}{AB}$

Also die Längen der Parallelen h1 und h2 zu einander entsprechen den Längen der Abschnitte einer Geraden g1 (oder g2) zueinander.

Da $\frac{\overline{EA'}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{ZB'}}{\overline{ZB}}$

und $\frac{\overline{EB'}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{ZB'}}{\overline{ZB}}$. (laut 1. und 2. Teil des Vierstreckensatzes)

ist $\frac{\overline{EA'}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{EB'}}{\overline{FB}}$

~~Als~~ Also die Längen der Abschnitte der Parallen h_1 zueinander entsprechen den Längen der Abschnitte h_2 zueinander.