Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

(a) Es sei $\mathbb{F}_3$ der endliche Körper mit drei Elementen. Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente des Kerns U der linearen Abbildung $\varphi : \mathbb{F}_3^3 \to \mathbb{F}_3^2$, $\varphi(v) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} v$.

(b) Bestimmen Sie eine Zerlegung des Polynoms $f = 2X^3 + 4X^2 - 2X \in \mathbb{Z}[X]$ in über $\mathbb{Z}$ irreduzible Faktoren.

(c) Bestimmen Sie ein $f \in \mathbb{R}[X]$ mit $(f) = (X^2 - 1, X^3 - 1)$ und begründen Sie, warum Ihre Wahl diese Gleichheit erfüllt.

(d) Zeigen Sie, dass das Element $2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$ irreduzibel ist.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

(a) Ermitteln Sie die Anzahl der Lösungen der folgenden Gleichungen in $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

$$x^5 = 0\,, \qquad x^5 = 1\,, \qquad x^5 = 2\,, \qquad x^5 = 3$$

(b) Ermitteln Sie die Anzahl der Lösungen der folgenden Gleichungen in $\mathbb{Z}/2024\mathbb{Z}$. $(2024 = 8 \cdot 11 \cdot 23)$

$$x^5 = 0\,, \qquad x^5 = 1\,, \qquad x^5 = 2\,, \qquad x^5 = 3$$

(c) Bestimmen Sie, wie viele fünfte Potenzen es in $\mathbb{Z}/2024\mathbb{Z}$ gibt.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Für eine Primzahl p sei $\mathbb{F}_p$ der endliche Körper mit $|\mathbb{F}_p| = p$; weiter sei $R := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{F}_p \right\}$.

(a) Zeigen Sie, dass R ein Teilring des Ringes der 2×2-Matrizen über $\mathbb{F}_p$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Einheitengruppe $R^\times$ im Fall $p \neq 2$ nicht einfach ist.

(c) Nun sei $p = 257$. Entscheiden Sie begründet, ob die Einheitengruppe $R^\times$ in diesem Fall auflösbar ist.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

(a) Seien K ein Körper und $f \in K[X]$ ein irreduzibles separables Polynom über K. Begründen Sie, warum die Ordnung der Galoisgruppe von f über K durch den Grad von f teilbar ist.

(b) Geben Sie ein Beispiel an, wieso die Aussage in (a) im Allgemeinen falsch wird, wenn f nicht mehr als irreduzibel vorausgesetzt wird.

(c) Begründen Sie, warum es zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 1$ eine Galoiserweiterung E/F von Körpern E, F gibt, deren Galoisgruppe die Ordnung n hat.

(d) Zeigen Sie, dass die Aussage in (c) im Allgemeinen falsch wird, wenn der Körper F fest vorgegeben wird.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

(a) Geben Sie eine explizite Darstellung der primitiven fünften Einheitswurzeln mithilfe von Quadratwurzeln an.

(Tipp: Wenn $X^4+X^3+X^2+X+1 = 0$, welche Polynomgleichung erfüllt dann $Y := X+X^{-1}$?)

(b) Folgern Sie aus Ihrer Lösung der Teilaufgabe (a) eine Konstruktionsvorschrift eines regelmäßigen Fünfecks mit Zirkel und Lineal.

(c) Geben Sie eine Konstruktionsvorschrift eines regelmäßigen Zwanzigecks mit Zirkel und Lineal an.