Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Hinweis zur Punktbewertung: Es sind insgesamt 31 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (7 P)

Bestimmen Sie alle Tripel (a, b, c) paarweise verschiedener natürlicher Zahlen, derart, dass jede dieser drei Zahlen die Summe der beiden anderen teilt.

Aufgabe 2 (9 P)

Eine Gruppe heißt *torsionsfrei*, wenn nur das neutrale Element endliche Ordnung besitzt. Eine torsionsfreie abelsche Gruppe $\neq 0$ heißt *vom Rang* 1, wenn es für je zwei Elemente x, y dieser Gruppe ganze Zahlen a, b, nicht beide gleich 0, gibt derart, dass $ax + by = 0$, z. B. ist die additive Gruppe $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen torsionsfrei vom Rang 1. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(1) Torsionsfreie abelsche Gruppen vom Rang 1 lassen sich in $\mathbb{Q}$ einbetten.

(2) Torsionsfreie *lokal zyklische Gruppen*, d. h. alle endlich erzeugten Untergruppen sind zyklisch, lassen sich in $\mathbb{Q}$ einbetten.

(3) Jede Untergruppe von $\mathbb{Q}$ ist lokal zyklisch.

Aufgabe 3 (6 P)

Für ein Element r eines assoziativen Ringes R mit 1, das ein Rechtsinverses s in R besitzt, sind äquivalent:

(1) r hat mindestens zwei verschiedene Rechtsinverse in R;

(2) r ist ein Linksnullteiler in R;

(3) r hat kein Linksinverses in R.

Aufgabe 4 (9 P)

Bestimmen Sie alle Teilkörper eines Zerfällungskörpers E des Polynoms $(x^3 - 3x + 1)(x^2 + 2)$ über $\mathbb{Q}$ und ein primitives Element von $E/\mathbb{Q}$.