Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Hinweis zur Punktbewertung: Es sind insgesamt 30 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Sei N die von $n_1 = (4,3,2,1)$, $n_2 = (1,2,3,4)$ und $n_3 = (-1,-1,-2,2)$ erzeugte Untergruppe von $\mathbb{Z}^4$. Man schreibe die Gruppe $\mathbb{Z}^4/N$ als Produkt zyklischer Gruppen.

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Sei G eine Gruppe der Ordnung 63.

(i) Man zeige, dass G einen nichttrivialen Normalteiler hat.

(II) Man konstruiere zwei nicht isomorphe nicht abelsche Gruppen der Ordnung 63 (als semidirektes Produkt).

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Sei $K/\mathbb{Q}$ eine quadratische Erweiterung. Sei $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(K)$ der Ring der $\mathbb{Q}$-linearen Abbildungen von K nach K. Man definiere $T: K \to \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(K)$ durch $T(a)(b) = ab$, $a, b \in K$.

(i) Man zeige, dass T ein injektiver Ringhomomorphismus ist.

(ii) Sei $Z(T(K))$ der Zentralisator von $T(K)$ in $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(K)$. Man zeige, dass $Z(T(K)) = T(K)$.

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Sei $\mathbb{F}_q$ ein Körper mit q Elementen und sei $n \in \mathbb{N}$ teilerfremd zu q. Sei K ein Zerfällungskörper von $X^n - 1$ über $\mathbb{F}_q$. Man zeige $[K:\mathbb{F}_q] = \min\{k \in \mathbb{N} \mid n \text{ teilt } q^k - 1\}$.

Aufgabe 5: (6 Punkte)

Seien S_2 respektive S_3 die Gruppen der Permutationen von $\{1,2\}$ resp. $\{1,2,3\}$. Man zeige, dass es eine Galoissche Erweiterung $K/\mathbb{Q}$ gibt mit Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \cong S_2 \times S_3$.