Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Hinweis zur Punktbewertung: Es sind insgesamt 30 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1. (6 Punkte)
$K/\mathbb{Q}$ sei eine endliche Körpererweiterung vom Grad n. Zeigen Sie, **dass** es genau n verschiedene Körpermonomorphismen von K nach $\mathbb{C}$ gibt und **dass** die Anzahl s derjenigen mit nicht-reellem Bild gerade ist. Mit $n = r + s$ weisen Sie $r = 0$ oder $s = 0$ für den Fall nach, **dass** $K/\mathbb{Q}$ galoissch ist, und geben Sie Beispiele für beide Fälle.

Aufgabe 2. (6 Punkte)
Zeigen Sie $N_G(N_G(P)) = N_G(P)$ für eine p-Sylowuntergruppe P der endlichen Gruppe G. ($N_G(U)$ ist der Normalisator der Untergruppe U von G.)

Aufgabe 3. (6 Punkte)
Der Körper k habe Charakteristik $p \neq 0$; K sei der Zerfällungskörper eines Polynoms aus $k[x]$. Zeigen Sie, **dass** der separable **Abschluss** K_{sep} von k in K der Zerfällungskörper eines separablen Polynoms aus $k[x]$ ist.

Aufgabe 4. (6 Punkte)
Sei k eine positive Zahl und sei $R := M_k(\mathbb{Z})$ der Ring der ganzzahligen $k \times k$-Matrizen. Zeigen Sie:
a) Für jede natürliche Zahl $n \geq 0$ ist nR ein zweiseitiges Ideal in R.
b) Jedes zweiseitige Ideal von R ist von der in a) genannten Art.

Aufgabe 5. (6 Punkte)
Welches sind die Galoisgruppen der Polynome $x^3 - 3x + 3$, $x^3 - 1$, $x^3 - 3x + 1$ über $\mathbb{Q}$?