Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Hinweis zur Punktbewertung: Es sind insgesamt 30 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Sei $K(t)$ der Körper der rationalen Funktionen in einer Unbestimmten über einem Körper K, und sei $f \in K(t)$ nicht konstant. Schreiben Sie $f = \frac{g}{h}$ $(g, h \in K[t], \operatorname{ggT}(g, h) = 1)$.

Zeigen Sie:

a) Das Polynom $h(X) \cdot f - g(X) \in K(f)\,[X]$ ist irreduzibel.

b) Genau dann ist $K(f) = K(t)$, wenn f von der Form

$$f = \frac{at+b}{ct+d} \quad (a, b, c, d \in K, ad - bc \neq 0) \text{ ist.}$$

c) Die Automorphismengruppe von $K(t)$ über K ist isomorph zur Restklassengruppe

$$\mathrm{GL}(2, K) \Big/ \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \middle| \lambda \neq 0 \right\}$$

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Sei Ω der algebraische Abschluss des Körpers $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, und seien K und L endliche Teilkörper von Ω mit p^r beziehungsweise p^s Elementen. α sei ein primitives Element von K über $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

a) r und s sind teilerfremd.

b) Das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ist in $L[X]$ irreduzibel.

c) $K \cap L = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Sei a ein Element der Ordnung $d > 1$ in der multiplikativen Gruppe des Körpers $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ und G die von den Abbildungen $\mu : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ $(x \mapsto ax)$ und $\alpha : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ $(x \mapsto x+1)$ erzeugte Untergruppe der Permutationsgruppe von $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

a) G ist nicht abelsch.

b) Jedes $g \in G$ besitzt eine eindeutige Darstellung

$$g = \mu^r \alpha^s \quad (0 \le r < d, 0 \le s < p)$$

c) G ist auflösbar.

d) Es gibt eine nicht abelsche Gruppe der Ordnung 555.

Aufgabe 4 (7 Punkte)

Sei $I \subset \mathbb{Z}[X]$ das von den Polynomen $X^4 + 3X^3 + X$ und $X^5 - 9X^3 + X^2 - 3X + 3$ erzeugte Ideal.

a) Zeigen Sie, dass $3 \in I$ ist.

b) Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente von $R := \mathbb{Z}[X]/I$.

c) Zeigen Sie, dass R eine zu $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ isomorphe Einheitengruppe hat.