Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Hinweis zur Punktbewertung: Es sind insgesamt 30 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Sei $f(X) = a_4X^4 + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten. Seien alle a_i ungerade. Man zeige, dass $f(X)$ irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist.

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Sei p eine Primzahl und sei S_p die Gruppe der Permutationen von $\{1, 2, ..., p\}$.

(i) Man gebe die Anzahl der Elemente der Ordnung p in S_p an.

(ii) Sei P eine p-Sylowuntergruppe von S_p. Man gebe die Anzahl der Elemente des Normalisators $N(P)$ von P in S_p an.

Aufgabe 3 (7 Punkte)

Sei $\xi \in \mathbb{C}$ eine primitive 7-te Einheitswurzel.

(i) Man bestimme α bzw. β in $\mathbb{Q}(\xi)$ so, dass $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 2$ und $[\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}] = 3$ ist.

(ii) Man bestimme jeweils das Minimalpolynom von α und von β.

Aufgabe 4 (7 Punkte)

Sei Mat $(2 \times 2, \mathbb{F}_3)$ der Ring der 2×2-Matrizen mit Koeffizienten im Körper $\mathbb{F}_3 \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

(i) Man zeige, dass es ein $\alpha \in$ Mat $(2 \times 2), \mathbb{F}_3)$ gibt mit Ordnung 8 bezüglich der Multiplikation.

(ii) Man zeige, dass $\{0, 1, \alpha, \alpha^2, ..., \alpha^7\}$ ein Körper ist mit den von Mat $(2 \times 2, \mathbb{F}_3)$ induzierten Operationen.

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Bestimmen Sie die Galoisgruppe über $\mathbb{Q}$ des Zerfällungskörpers von $\varphi(X) = X^4 + 6X^2 + 2 \in \mathbb{Z}[X]$.