Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Hinweis zur Punktbewertung: Es sind insgesamt 30 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Sei $R = \mathbb{Z}[[T]]$ der Ring der formalen Potenzreihen mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$.

a) Sei $m \subseteq R$ ein maximales Ideal in R. Zeigen Sie: $m \cap \mathbb{Z}$ ist ein maximales Ideal in $\mathbb{Z}$.

b) Bestimmen Sie die Gruppe der Einheiten $R^{\times}$.

c) Bestimmen Sie alle maximalen Ideale in R.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Sei G eine endliche Gruppe und $U \subseteq G$ eine Untergruppe vom Index n. Durch die Wirkung von G auf G/U wird ein Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \to S_n$ definiert (dies muss nicht gezeigt werden).

a) Zeigen Sie: $\ker(\varphi) \subseteq U$.

b) Sei p der kleinste Primteiler von $|G|$ und $[G : U] = p$. Zeigen Sie: U ist normal in G.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung von

$$f(x) = x^5 + x^4 + 14x^3 + 14x^2 + 28x + 28$$

über den Polynomringen $\mathbf{F}_2[x]$, $\mathbf{F}_3[x]$ und $\mathbb{Q}[x]$. Bestimmen Sie in diesen drei Fällen jeweils die Ordnung der Galoisgruppe von f.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Beantworten Sie die folgenden Fragen und geben Sie jeweils eine kurze Begründung für Ihre Antwort:

a) Kann man ein regelmäßiges 19-Eck mit Zirkel und Lineal konstruieren?

b) Ist $x^2 + x + 11 \equiv 0 \pmod{370368}$ lösbar?

c) Ist $\mathbb{Z}[x]$ ein Hauptidealring?

d) Sei $f(x) = x^{19} + 19x + 57 \in \mathbb{Q}[x]$. Ist die Restklasse von $x^{18} + 2$ in $\mathbb{Q}[x]/(f)$ invertierbar?

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Es sei p eine Primzahl.

a) Zeigen Sie, dass die Menge aller 3×3-Matrizen über $\mathbb{Z}$

$$M = \{(a_{ij}) \mid a_{ij} \in p\mathbb{Z} \text{ falls } i < j\}$$

ein Ring (mit Einselement) ist.

b) Geben Sie drei Ideale I von M an mit $M/I \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.