Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Vorbemerkung: *Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt 24 Punkte. Begründen Sie alle Schlussweisen und Rechenschritte durch einen kurzen Text.*

Aufgabe 1:

Sei p eine Primzahl mit $p \equiv 1 \bmod 4$. Zeigen Sie:

a) Es gibt eine natürliche Zahl x mit $x^2 \equiv -1 \bmod p$.

b) p ist kein Primelement im Hauptidealring $\mathbb{Z}[i]$ der ganzen Gaußschen Zahlen.

c) Es gibt natürliche Zahlen x, y mit $p = x^2 + y^2$.

Aufgabe 2:

Zeigen Sie (z.B. mit Hilfe der Zykeldarstellung von Permutationen):

a) Die alternierende Gruppe A_4 hat keine Untergruppe der Ordnung 6.

b) Die symmetrische Gruppe S_5 hat ein triviales Zentrum.

Aufgabe 3:

Geben Sie drei Körper mit verschiedenen Charakteristiken an, für die die binomische Formel

$$(a+b)^5 = a^5 + b^5$$

für alle Körperelemente a, b gilt.

Aufgabe 4:

Sei x eine komplexe Zahl mit $x^6 + 675 = 0$. Zeigen Sie:

a) Es ist $\sqrt{-3} \in \mathbb{Q}(x)$.

b) Der Körper $\mathbb{Q}(x)$ ist eine normale Erweiterung von $\mathbb{Q}$.

c) Das Polynom $X^6 + 675$ hat eine zu S_3 isomorphe Galoisgruppe über $\mathbb{Q}$.