Thema Nr. 3

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Vorbemerkung: *Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt 30 Punkte. Begründen Sie alle Schlussweisen und Rechenschritte durch einen kurzen Text.*

Aufgabe 1:

Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung 255 zyklisch ist!

Aufgabe 2:

Sei K ein Körper mit vier Elementen.
Bestimmen Sie eine Additions- und eine Multiplikationstafel von K.

Aufgabe 3:

Die Elemente des Restklassenkörpers $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ seien mit 0, 1, 2, 3, 4 bezeichnet. Bestimmen Sie zu dem Polynom

$$f(X) = X^7 + 2X^5 + 3X^4 + X + 4 \quad \in \mathbb{F}_5[X]$$

ein Polynom $g \in \mathbb{F}_5[X]$ vom Grad ≤ 3 mit

$$g(i) = f(i) \quad \text{für} \quad i = 1,2,3,4.$$

Aufgabe 4:

Sei K ein Körper und R die Menge aller 2×2-Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ mit $a,b,c \in K$.
Bestimmen Sie alle nichttrivialen zweiseitigen Ideale I des Ringes R.

Aufgabe 5:

Sei $R := \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ der Ring der ganzen Gaußschen Zahlen mit $i^2 = -1$ und $a := 1 + 2i$. Zeigen Sie, dass der Faktorring R/aR ein Körper mit fünf Elementen ist!