

Thema Nr. I**(Aufgabengruppe)**

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Vorbemerkung: Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt 30 Punkte. Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.

Aufgabe 1:

Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung n , sei $n = a \cdot b$ eine Zerlegung in teilerfremde Faktoren $a, b > 1$. Zeigen Sie:

- a) Es gibt einen minimalen Normalteiler N in G mit zu b teilerfremdem Index $[G : N]$.
- b) Der Normalteiler in a) ist die von der Teilmenge $\{g^a; g \in G\}$ erzeugte Untergruppe von G .
- c) Es gibt eine endliche Gruppe H und einen Homomorphismus $u : G \rightarrow H$ mit den folgenden Eigenschaften:
 - i. Die Ordnung von H ist teilerfremd zu b .
 - ii. Jeder Gruppenhomomorphismus $f : G \rightarrow A$ in eine endliche Gruppe A mit zu b teilerfremder Ordnung faktorisiert eindeutig über u , d.h. ist von der Gestalt $f = h \circ u$ mit einem wohlbestimmten Homomorphismus $h : H \rightarrow A$.

Aufgabe 2:

Zeigen Sie: Sind $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ungerade, so ist das Polynom $aX^4 + bX^3 + c$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.

Aufgabe 3:

Sei k ein Körper, der keine Galois-Erweiterung vom Grad 3 hat. Kann k dann eine Galois-Erweiterung vom Grad 225 haben?

Aufgabe 4:

Sei $K|k$ eine Galois-Erweiterung, deren Galoisgruppe isomorph zur symmetrischen Gruppe S_n ist. Zeigen Sie:

- a) K enthält n zueinander konjugierte Zwischenkörper vom Grad n über k , die zusammen K über k erzeugen.
- b) K ist der Zerfällungskörper eines Polynoms vom Grad n aus $k[X]$ über k .

Aufgabe 5:

Sei $n > 2$ und ζ eine primitive n -te Einheitswurzel über \mathbb{Q} . Zeigen Sie

$$[\mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1}) : \mathbb{Q}] = \frac{1}{2}\phi(n),$$

wobei ϕ die Eulersche ϕ -Funktion bezeichnet.