

Thema Nr. 3**(Aufgabengruppe)**

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Vorbemerkung: Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt 24 Punkte. Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.

Aufgabe 1:

- a) Sei $K = \mathbb{F}_2$ der Körper mit 2 Elementen. Finden Sie ein Polynom $f \in K[x]$, das die Kongruenz

$$(x^4 + x^3 + x^2 + 1) \cdot f \equiv x^2 + 1 \pmod{(x^3 + 1)}$$

in $K[x]$ erfüllt.

- b) Sei $K = \mathbb{F}_3$ der Körper mit 3 Elementen. Gibt es dann zu jedem $g \in K[x]$ ein $f \in K[x]$, so dass die Kongruenz

$$(x^2 + 1) \cdot f \equiv g \pmod{(x^3 + 1)} \quad (*)$$

erfüllt ist?

- c) Finden Sie in der Kongruenz (*) für $g = 1$ eine Lösung $f \in \mathbb{F}_3[x]$.

Aufgabe 2:

Sei $K = \mathbb{F}_2$ und $f = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \in K[x]$. Bestimmen Sie die Galoisgruppe von f über K .

Aufgabe 3:

Die Diedergruppe D_6 , also die Symmetriegruppe des regulären Sechsecks, und die alternierende Gruppe A_4 haben beide 12 Elemente.

- a) Zeigen Sie, dass die Gruppen D_6 und A_4 nicht isomorph sind.
- b) Geben Sie eine weitere nichtabelsche Gruppe der Ordnung 12 an, die zu den beiden genannten Gruppen nicht isomorph ist.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Für ein reelles Polynom $f \in \mathbb{R}[x]$ bezeichne f' die Ableitung. Seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ verschiedene reelle Zahlen, und sei I die Menge aller Polynome $f \in \mathbb{R}[x]$ mit

$$f(a_i) = f'(a_i) = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Zeigen Sie:

- a) I ist ein Ideal im Polynomring $\mathbb{R}[x]$.
- b) I wird erzeugt von dem Polynom $\prod_{i=1}^n (X - a_i)^2$.
- c) Wie viele Ideale besitzt der Faktorring $\mathbb{R}[x]/I$?