

Thema Nr. 1

(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten.

Vorbemerkung: Auf die einzelnen Aufgaben wird jeweils maximal die in Klammern angegebene Punktzahl vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt 30 Punkte. Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.

Aufgabe 1 (3 Punkte):

Beweisen oder widerlegen Sie: Eine natürliche Zahl der Gestalt $4n + 3$ mit $n \in \mathbb{N}$ besitzt keine Darstellung als Summe von zwei Quadraten ganzer Zahlen.

Aufgabe 2 (6 Punkte):

Sei R ein Integritätsring. Für Ideale a, b in R definiert man

$$a \sim b :\Leftrightarrow \text{Es gibt } \alpha, \beta \in R \setminus \{0\} \text{ mit } \alpha \cdot a = \beta \cdot b.$$

Zeigen Sie:

a) Die Relation \sim ist eine Äquivalenzrelation, und es gilt

$$a_1 \sim b_1, a_2 \sim b_2 \Rightarrow a_1 \cdot a_2 \sim b_1 \cdot b_2$$

b) Genau dann gilt $a \sim b$, wenn a und b als R -Moduln isomorph sind.

Aufgabe 3 (6 Punkte):

Bestimmen Sie einen größten gemeinsamen Teiler von $26 + 13i$ und $14 - 5i$ im Ring $\mathbb{Z}[i]$ der Gaußschen ganzen Zahlen.

Aufgabe 4 (6 Punkte):

Untersuchen Sie (mit Beweis) auf Irreduzibilität:

a) $f(X) = X^4 - X^3 - 9X^2 + 4X + 2$ und
 $g(X) = X^4 + 2X^3 + X^2 + 2X + 1$ in $\mathbb{Q}[X]$.

b) $f(X, Y) = Y^6 + XY^5 + 2XY^3 + 2X^2Y^2 - X^3Y + X^2 + X$ in $\mathbb{Q}[X, Y]$

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5 (9 Punkte):

Sei k ein Körper mit $\text{char } k \neq 2$, sei $f \in k[X]$ ein Polynom vom Grade $n \geq 2$, sei K ein Zerfällungskörper von f über k , und f habe n verschiedene Nullstellen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ in K .

Das Element $\Delta \in K$ sei definiert durch

$$\Delta := \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i).$$

Dann heißt $D := \Delta^2$ die Diskriminante von f .

- a) Zeigen Sie: K ist galoissch über k und es ist $D \in k$.
- b) Sei $G := \text{Gal}(K|k)$ die Galoisgruppe von K über k . Zeigen Sie:

$\Delta \in k \Leftrightarrow$ Jedes $\sigma \in G$ definiert eine gerade Permutation der $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

- c) Sei $f := X^4 + 2aX^2 + b \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel. Bestimmen Sie die Diskriminante von f und zeigen Sie:

$$\sqrt{b} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$