

**Thema Nr. 3**

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

**Vorbemerkung:** Auf die einzelnen Aufgaben wird jeweils maximal die in Klammern angegebene Punktzahl vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt 30 Punkte. Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.

**Aufgabe 1** (3 Punkte):

Zeigen Sie: Jede endliche Körperweiterung  $L$  über  $K$  ist algebraisch.

**Aufgabe 2** (6 Punkte):

- Geben Sie eine Gruppe mit genau 16 Untergruppen an.
- Geben Sie einen Körper mit genau 16 Teilkörpern an.

**Aufgabe 3** (7 Punkte):

Geben Sie explizit einen Ring-Isomorphismus

$$\varphi : \mathbb{Z}/1000\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/125\mathbb{Z}$$

und seine Umkehrung  $\varphi^{-1}$  an.

**Aufgabe 4** (6 Punkte):

Hat die Gleichung

$$x^2 + 91y = 5$$

eine ganzzahlige Lösung? Begründen Sie Ihre Antwort.

**Aufgabe 5** (8 Punkte):

Sei  $f = X^n - a$  ein über  $\mathbb{Q}$  irreduzibles Polynom mit abelscher Galoisgruppe  $\text{Gal}(f|\mathbb{Q})$ . Zeigen Sie, dass  $n$  eine Potenz von 2 ist.

[Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass  $\text{Gal}(f|\mathbb{Q})$  nichtabelsch ist, wenn  $n$  eine ungerade Primzahl ist.]