Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Vorbemerkung: Es sind insgesamt 30 Punkte erreichbar. Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.

Aufgabe 1:
Sei $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ ein irreduzibles Polynom. Die Galoisgruppe von f über $\mathbb{Q}$ habe ungerade Ordnung. Man zeige, dass f nur reelle Nullstellen hat.

(7 Punkte)

Aufgabe 2:
Sei $f(X,Y) = X^{17} + Y^{41}(X^3 + X + 1) - Y \in \mathbb{C}[X,Y]$.

a) Man zeige, dass f als Polynom in X über dem Koeffizientenring $\mathbb{C}[Y]$ irreduzibel ist. (Hinweis: Eisenstein-Kriterium)

b) Man zeige, dass f ein irreduzibles Element im Ring $\mathbb{C}[X,Y]$ ist.

(8 Punkte)

Aufgabe 3:
Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung $p^m > 1$, mit $m \in \mathbb{N}$ und p eine Primzahl.

a) Man zeige, dass jede maximale Untergruppe von G ein Normalteiler vom Index p ist.

b) Sei N der Schnitt der maximalen Untergruppen von G. Man zeige, dass G/N abelsch ist und Exponent p hat. (Der Exponent einer endlichen Gruppe ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Elementordnungen.)

(8 Punkte)

Aufgabe 4:
Sei R der Restklassenring $\mathbb{Z}/2006\mathbb{Z}$.

a) Wie viele Nullstellen hat das Polynom $X^2 - 1$ in R?

b) Wie viele Nullstellen hat das Polynom $X^3 - 1$ in R?

(7 Punkte)