Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Vorbemerkung: Es sind insgesamt 30 Punkte erreichbar. Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.

Aufgabe 1:
Beweisen Sie:

Es sei $(G,+)$ eine abelsche Gruppe und U, V seien Untergruppen von G. Dann gilt $G = U \oplus V$ (d. h. G ist die direkte Summe von U und V) genau dann, wenn je zwei Nebenklassen $U + a$ und $V + b$ mit $(a, b \in G)$ genau ein Element gemeinsam haben. (5 Punkte)

Aufgabe 2:
Für welche Primzahlen $p = 10n + k \quad (n \geq 0, k \in \{1, 3, 7, 9\})$ ist 5 ein quadratischer Rest und für welche ein quadratischer Nichtrest? (5 Punkte)

Aufgabe 3:
Zeigen Sie:

a) Die additive Gruppe der reellen Zahlen ist isomorph zur multiplikativen Gruppe der positiven reellen Zahlen.

b) Die additive Gruppe eines Körpers ist nie isomorph zur multiplikativen Gruppe dieses Körpers.

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Es sei L eine Galoiserweiterung eines Körpers K, so dass die Galoisgruppe von L über K die symmetrische Gruppe S_n mit $n \geq 5$ ist. Wie viele Zwischenkörper F mit $K < F < L$ existieren, so dass F eine Galoiserweiterung von K ist? Was ist die Galoisgruppe von F über K und die von L über F? (5 Punkte)

Aufgabe 5:
Beweisen Sie:

a) Eine Gruppe, in der jedes Element die Ordnung 2 hat, ist abelsch.

b) Hat eine nichtabelsche Gruppe G der Ordnung 8 zwei verschiedene Elemente der Ordnung zwei, so ist sie isomorph zur Symmetriegruppe eines Quadrates (ist also insbesondere eine Diedergruppe).

(5 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 6:

Es sei R ein kommutativer Ring mit 1. Es sei M ein maximales Ideal von R.

a) Sei $1 + a$ invertierbar für jedes Element $a \in M$. Zeigen Sie, dass M das einzige maximale Ideal von R ist.

b) Zeigen Sie, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ der Faktorring R/M^n nur ein einziges maximales Ideal hat. (5 Punkte)