Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Vorbemerkung: Es sind insgesamt 30 Punkte erreichbar. Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.

Aufgabe 1:
Gegeben sei eine natürliche Zahl m. Beweisen Sie:

a) Es gibt unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $m | \varphi(n)$. (φ bezeichnet die Eulersche Phi–Funktion.)

b) Es gibt unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, die in ihrer Dezimaldarstellung nur aus Nullen und Einsen bestehen und Vielfache von m sind.

(5 Punkte)

Aufgabe 2:
G und H bezeichne endliche Gruppen, U sei eine Untergruppe von G und $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Beweisen Sie für die Gruppenindizes die Gleichung

$$[G : U] = [f(G) : f(U)]\,[\mathrm{Kern}\, f : (\mathrm{Kern}\, f \cap U)].$$

(5 Punkte)

Aufgabe 3:
G sei eine Gruppe, und $G \times G$ bezeichne das direkte Produkt von G mit G. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Ist jede Untergruppe von $G \times G$ Normalteiler, so ist G abelsch.

b) Ist jede Untergruppe von G Normalteiler, so ist G abelsch.

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
R sei ein faktorieller Ring mit Quotientenkörper K, und $x \in K$ sei Nullstelle eines normierten Polynoms aus $R[X]$. Zeigen Sie: $x \in R$. (5 Punkte)

Aufgabe 5:
Ist $K|\mathbb{Q}$ Galoiserweiterung vom Grad 4 mit zyklischer Galoisgruppe, so hat das Polynom $X^2 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ keine Nullstelle in K. (5 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 6:

Sind $L|K$ und $M|L$ endliche Körpererweiterungen und ist $M|K$ galoissch mit Galoisgruppe G, so ist auch der Körper

$$K\Big(\bigcup_{\sigma\in G}\sigma(L)\Big)$$

galoissch über K. (5 Punkte)