

Thema Nr. 3
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

Vorbemerkung:

Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.

Aufgabe 1:

Sei $K = \{0, 1\}$ der Körper mit zwei Elementen, und E sei ein Erweiterungskörper von K mit $|E| = 2^8$ Elementen.

Wie viele über K primitive Elemente besitzt E ? (Das sind Elemente $\alpha \in E$ mit $E = K(\alpha)$.)
Begründen Sie Ihre Antwort. (6 Punkte)

Aufgabe 2:

Sei K wie in Aufgabe 1 und es sei $f = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 \in K[X]$.

- a) Beweisen Sie, dass f irreduzibel in $K[X]$ ist.
- b) Sei (f) das von f erzeugte Ideal in $K[X]$. Es sei E der Erweiterungskörper $E := K[X]/(f)$ von K und es sei x das Element $x := X + (f) \in E$.
Bestimmen Sie die Ordnung von x in der multiplikativen Gruppe E^* von E . (6 Punkte)

Aufgabe 3:

Es sei $G = \langle z \rangle$ eine multiplikativ geschriebene zyklische Gruppe der Ordnung 63 (mit z als einem erzeugenden Element).

- a) Bestimmen Sie (explizit) zwei nicht triviale Untergruppen G_1 und G_2 von G , so dass G das direkte Produkt von G_1 und G_2 ist.
- b) Bestimmen Sie die Ordnung des Elementes $z^{49} \in G$. (6 Punkte)

Aufgabe 4:

Seien G und z wie in der Aufgabe 3.

- a) Bestimmen Sie einen endlichen sowie einen unendlichen Körper K , dessen multiplikative Gruppe K^* eine zu G isomorphe Untergruppe enthält.
- b) Sei K ein Körper und G eine Untergruppe von K^* . Zeigen Sie, dass $\sum_{i=0}^{62} z^i = 0$. (6 Punkte)

Aufgabe 5:

Gegeben sei das Polynom $f := X^4 - 3 \in \mathbb{Q}[X]$.

- a) Beweisen Sie: $L := \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}, i)$ ist Zerfällungskörper von f .
- b) Bestimmen Sie den Grad der Körpererweiterung L/\mathbb{Q} .
- c) Beweisen Sie: $a := \sqrt[4]{3} + i$ ist ein primitives Element von L über \mathbb{Q} .

(6 Punkte)