Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Sei G eine endliche Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe. Sei $x \in X := G/H$ und sei $\emptyset \neq U \subset X$ eine Teilmenge. Zeigen Sie, dass die Anzahl

$$|\{g \in G \mid gU \ni x\}|$$

unabhängig von x ist. (6 Punkte)

Aufgabe 2:

Ist G eine abelsche Gruppe, dann sei $\operatorname{tor}(G) := \{g \in G \mid$ es gibt ein $1 \leq n \in \mathbb{N}$ mit $ng = 0\}$ Zeigen Sie:

a) $\operatorname{tor}(G)$ ist eine Untergruppe von G und $\operatorname{tor}(G/\operatorname{tor}(G)) = \{0\}$.

b) Ist $G = G_1 \times \cdots \times G_r$ ein Produkt von abelschen Gruppen G_i $(i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq r)$, so gilt $\operatorname{tor}(G) = \operatorname{tor}(G_1) \times \cdots \times \operatorname{tor}(G_r)$.

(6 Punkte)

Aufgabe 3:

Sei K ein Körper und K_f ein Zerfällungskörper eines Polynoms $f(X) = (X - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (X - \alpha_n) \in K[X]$ mit $\alpha_i \in K_f$. Sei $E_k = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_k), k \leq n$. Zeigen Sie, dass $[E_k : K] \leq \frac{n!}{(n-k)!}$.

(6 Punkte)

Aufgabe 4:

Sei $\sqrt{5} \in \mathbb{R}$ und $i\sqrt{5} \in \mathbb{C}, i^2 = -1$ und $L := \mathbb{Q}(\sqrt{5}), K := \mathbb{Q}(i\sqrt{5})$. Sei $E = L \cdot K$ das Kompositum von L und K in $\mathbb{C}$.

a) Zeigen Sie, dass $E/\mathbb{Q}$ galoissch ist und bestimmen Sie den Isomorphietyp der Galoisgruppe G von E über $\mathbb{Q}$.

b) Bestimmen Sie alle Untergruppen U von G.

c) Ist U eine Untergruppe von G so sei E^U der zugehörige Fixkörper. Finden Sie für jedes $U \subset G$ ein $\beta \in \mathbb{C}$ mit $E^U = \mathbb{Q}(\beta)$.

(6 Punkte)