Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Die höchste erreichbare Punktzahl für diese Aufgabengruppe beträgt 30 Punkte.

Aufgabe 1:

Sei A eine endliche abelsche Gruppe. Sei weiter $B \subseteq A$ eine Untergruppe mit $B \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $A/B \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

a) Bestimmen Sie die Ordnung von A.

b) Zeigen Sie, dass A höchstens 4 Elemente der Ordnung ≤ 2 hat.

c) Zeigen Sie, dass A entweder zyklisch ist oder $A \cong A_1 \times A_2$ mit A_1, A_2 zyklisch.

d) Bestimmen Sie nun alle Möglichkeiten für A.

(8 Punkte)

Aufgabe 2:

Für ein Element g einer Gruppe G sei $\iota_g \in \mathrm{Aut}(G)$ der zugehörige innere Automorphismus: $\iota_g(h) = ghg^{-1}$. Die Gruppe G heiße vollständig, wenn die Abbildung $G \to \mathrm{Aut}(G) : g \mapsto \iota_g$ bijektiv ist.

a) Zeigen Sie, dass G genau dann vollständig ist, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

   i) Das Zentrum von G ist trivial.

   ii) Jeder Automorphismus von G ist ein innerer.

b) Sei G eine Gruppe und $N \subseteq G$ ein Normalteiler. Angenommen N ist vollständig. Zeigen Sie, dass N ein direkter Faktor von G ist.

(9 Punkte)

Aufgabe 3:

Für den Ring $A = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ betrachten wir Einheiten im Polynomring $A[t]$.

a) Zeigen Sie, dass $p(t) = 1 + 5t$ keine Einheit in $A[t]$ ist.

b) Zeigen Sie, dass $q(t) = 1 + 6t$ eine Einheit in $A[t]$ ist.

(7 Punkte)

Aufgabe 4:

Man gebe ein normiertes, quadratisches und irreduzibles Polynom $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ an, so dass $f(x+d)$ für keine Wahl von $d \in \mathbb{Z}$ ein Eisensteinpolynom ist.

(6 Punkte)