

Thema Nr. 2
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

Die höchste erreichbare Punktzahl für diese Aufabengruppe beträgt 29 Punkte.

Aufgabe 1:

Mit \mathcal{S}_n sei die symmetrische Gruppe auf n Elementen bezeichnet und mit Z_4 eine zyklische Gruppe der Ordnung 4.

- a) Wieviele Untergruppen in $\mathcal{S}_3 \times Z_4$ sind isomorph zu Z_4 ?
- b) Wieviele 5-Sylowgruppen und wieviele 3-Sylowgruppen gibt es in der \mathcal{S}_5 ?

(9 Punkte)

Aufgabe 2:

Sei G eine Gruppe mit einer Untergruppe vom Index 4. Zeigen Sie, dass G einen Normalteiler vom Index 2 oder 3 hat.

(7 Punkte)

Aufgabe 3:

Es sei R ein kommutativer Ring mit Eins, $I \subset R$ ein Ideal, das nur nilpotente Elemente enthält, und $\pi : R \rightarrow R/I$ sei die kanonische Projektion. Zeigen Sie:

Ist $x \in R$ ein Element, so dass $\pi(x)$ eine Einheit in R/I ist, dann ist x eine Einheit in R .

(6 Punkte)

Aufgabe 4:

Betrachten Sie den Körper $K := \mathbb{Q}(\sqrt[5]{3}, \sqrt{7})$.

- a) Zeigen Sie, dass $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ für $\alpha = \sqrt[5]{3} \cdot \sqrt{7}$.
- b) Bestimmen Sie den Grad der Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subset K$.
- c) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von α über \mathbb{Q} .

(7 Punkte)