Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Die höchste erreichbare Punktzahl für diese Aufgabengruppe beträgt 30 Punkte.

Aufgabe 1:

a) Wieviele Gruppenhomomorphismen $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to S_5$ gibt es?

b) Sei $f(X)$ das Polynom

$$f(X) = (X+1)^5 - 6(X+1)^3 + 2X + 8 \in \mathbb{Z}[X].$$

Wieviele Ringhomomorphismen $\mathbb{Q}[X]/(f) \to \mathbb{C}$ gibt es?

Die Antworten sind zu begründen.

(7 Punkte)

Aufgabe 2:

Zeigen Sie: Das von 5 und $4 + \sqrt{11}$ erzeugte Ideal im Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{11}] = \{a + b\sqrt{11} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ist ein maximales Ideal.

(7 Punkte)

Aufgabe 3:

Seien $n \geq 3$ eine ungerade natürliche Zahl und $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ die Gruppe der invertierbaren Elemente im Ring $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Die multiplikative Gruppe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ operiert auf der additiven Gruppe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ durch Multiplikation im Ring $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Sei $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ das zugehörige semidirekte Produkt mit der Verknüpfungsvorschrift $(\bar{x}_1, \bar{s}_1) \circ (\bar{x}_2, \bar{s}_2) = (\bar{x}_1 + \bar{s}_1 \cdot \bar{x}_2\,, \bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2)$ für alle $(\bar{x}_1, \bar{s}_1), (\bar{x}_2, \bar{s}_2) \in G$, und $H \subset G$ die Untergruppe aller Elemente in G mit erster Komponente 0.

Zeigen Sie: Es gibt genau n zu H konjugierte Untergruppen in G.

(7 Punkte)

Aufgabe 4:

a) Berechnen Sie das Minimalpolynom von $\zeta_{15} = e^{\frac{2\pi i}{15}}$ über $\mathbb{Q}$.

b) Seien M der Zerfällungskörper von $X^{15} - 10$ über $\mathbb{Q}$ und G die Automorphismengruppe von M über $\mathbb{Q}$. Bestimmen Sie die Gruppe G und zeigen Sie, dass G nicht isomorph zur symmetrischen Gruppe S_5 ist.

(9 Punkte)