Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Zeigen Sie, dass es bis auf Isomorphie genau zwei Gruppen der Ordnung 99 gibt.

(6 Punkte)

Aufgabe 2:

a) Sei G eine endliche Gruppe und sei H eine echte Untergruppe von G (d.h. $H \neq G$). Zeigen Sie:

$$G \neq \bigcup_{x \in G} xHx^{-1}.$$

b) Sei $G := GL(2, \mathbb{C})$ die Gruppe der invertierbaren komplexen 2×2 - Matrizen und sei $H < G$ die Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen, d.h.

$$H := \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G \mid c = 0\}.$$

Zeigen Sie:

$$G = \bigcup_{x \in G} xHx^{-1}.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 3:

Betrachten Sie die Gauß'schen Zahlen

$$\mathbb{Z}[i] := \{a + ib \in \mathbb{C} | a, b \in \mathbb{Z}\}$$

mit der Normabbildung $N : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{N}$, $N(z) := z\bar{z}$. $\bar{z}$ steht dabei für die zu z konjugierte Zahl.

a) Zeigen Sie: $z \in (\mathbb{Z}[i])^* := \{z \in \mathbb{Z}[i] \mid z \text{ ist invertierbar}\} \Leftrightarrow N(z) = 1$.

b) Sei $q \in \mathbb{Z}[i]$, so dass $N(q)$ eine ungerade Primzahl ist. Zeigen Sie: q ist ein Primelement in $\mathbb{Z}[i]$ und für alle $\epsilon \in (\mathbb{Z}[i])^*$ gilt: $q \neq \epsilon\bar{q}$.

(6 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

a) Sei $f := X^4 + a_1X^3 + a_2X^2 + a_3X + a_4 \in \mathbb{Z}[X]$. Seien a_1, a_4 ungerade und a_2, a_3 entweder beide gerade oder beide ungerade. Zeigen Sie: f ist irreduzibel.

b) Sei K ein Körper. Ist $f = Y^3 + XY^2 + X^3 + X^2Y + X \in K[X, Y]$ irreduzibel? Begründen Sie Ihre Antwort!

(6 Punkte)

Aufgabe 5:

Sei E/K eine endliche Galoiserweiterung und sei $\alpha \in E$, so dass $\sigma(\alpha) \neq \alpha$ für alle $1 \neq \sigma \in Gal(E/K)$.

Zeigen Sie: α ist ein primitives Element von E/K. (6 Punkte)